Mecánica FI2001-3
Ejercicio 5: Martes 9 de mayo, 2023

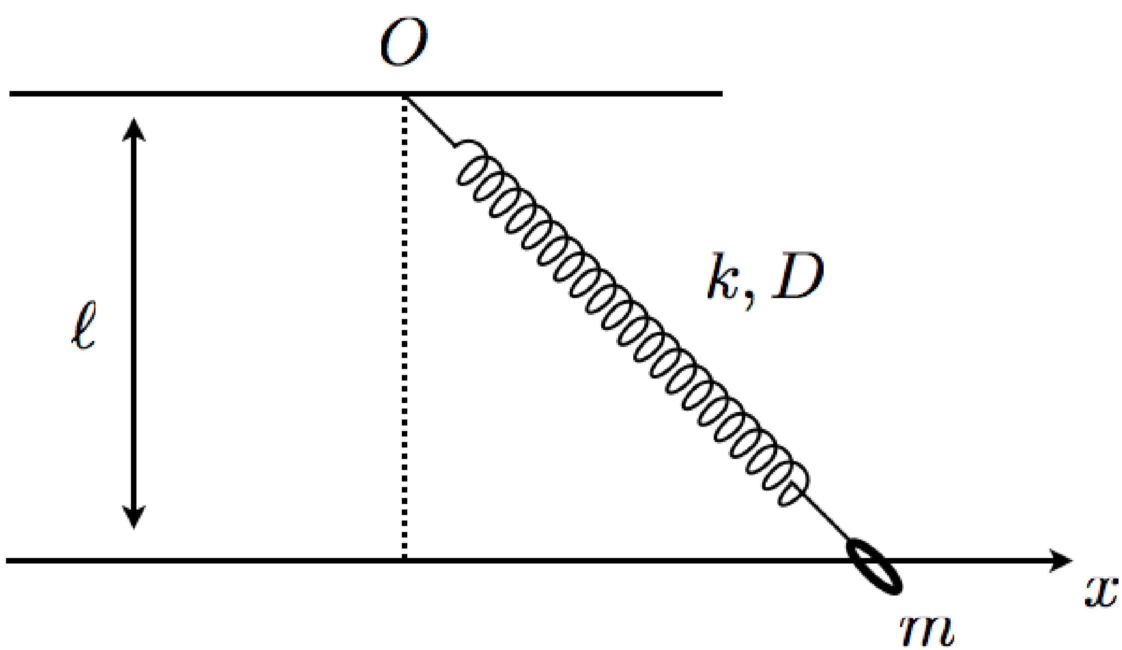
Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Francisco Colipi y Javier Huenupi
Ayudantes: Gabriel Marín y Valentina Suárez

Una argolla de masa m puede deslizar sin roce a lo largo de una varilla dispuesta sobre el eje x de la figura. La argolla está unida a un resorte de constante elástica k y largo natural D, cuyo otro extremo está unido a un punto fijo O ubicado a una altura ℓ de la varilla.

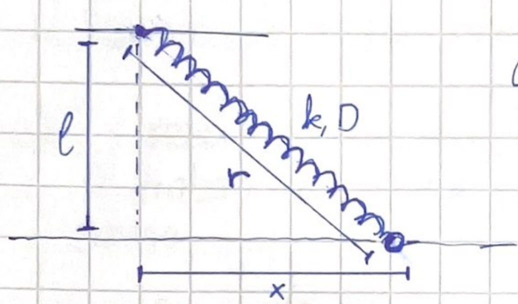
(a) 3pts. Determine el potencial $U(x)$ que controla el movimiento de la argolla m.

(b) 2pts. Determine la posición de los dos puntos de equilibrio estable del sistema para el caso $D > \ell$.

(c) 1pt. Suponga que la argolla se desplaza desde $x = 0$ al punto de equilibrio $x_e > 0$. ¿Cuánto trabajo ejerce el resorte en dicho recorrido?



Ejercicio 5: Energía y trabajo



a) Identificamos las fuerzas

- Peso: Fuerza conservativa
- Normal: No conservativa, pero no genera trabajo

Sabemos que la energía potencial elástica se expresa como

$$U_e = \frac{1}{2} k (r - D)^2$$

donde r lo podemos escribir con pitágoras

$$r^2 = \ell^2 + x^2$$

$$\Rightarrow U_e(x) = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{\ell^2 + x^2} - D\right)^2$$

b) Los puntos de equilibrio cumplen $\partial U(x_0)/\partial x = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial U_e(x)}{\partial x} = k\left(\sqrt{\ell^2 + x^2} - D\right) \frac{2x}{(\ell^2 + x^2)^{1/2}} \stackrel{!}{=} 0$$

notamos que esto se cumple para 2 (más bien dicho 3) posiciones

$$X_0 = 0 \quad \vee \quad \sqrt{\ell^2 + x_0^2} - D = 0 \Rightarrow X_0 = \pm\sqrt{D^2 - \ell^2}$$

el segundo caso es por simetría del problema

c) El resorte genera una fuerza conservativa, por lo que el trabajo que genera esta fuerza la podemos calcular como

$$W^c_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}^c(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U(r_A) - U(r_B)$$

en este caso $\vec{r}_A = 0\hat{\imath}$ y $\vec{r}_B = \sqrt{D^2 - \ell^2}\,\hat{\imath}$, entonces reemplazamos en el potencial elástico encontrado

$$W^e_{A\to B} = U_e(0) - U_e(\sqrt{D^2 - \ell^2})$$

$$= \frac{1}{2}k(\ell - D)^2 - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{\ell^2 + D^2 - \ell^2} - D\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}k(\ell - D)^2 - \frac{1}{2}k\cancel{(D - D)^2}^{\,0}$$

$$= \frac{1}{2}k(\ell - D)^2$$