Ejercicio 4

Como el mov. es en el plano horizontal, entonces $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$ y su diferencial es

$$d\vec{r} = d(\rho\hat{\rho}) = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\, d\phi\,\hat{\phi}$$

donde podemos escribir $d\phi$ como

$$d\phi = \frac{d\phi}{d\rho}\, d\rho = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\rho}}\, d\rho = \frac{\omega_0}{\dot{\rho}}\, d\rho$$

Ahora, por segunda Ley de Newton tenemos

$$m\left((\ddot{\rho} - \rho\omega_0^2)\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\omega_0\,\hat{\phi} \right) = N\hat{\phi}$$

$$\hat{\rho})\quad m(\ddot{\rho} - \rho\omega_0^2) = 0$$

$$\hat{\phi})\quad 2m\omega_0\dot{\rho} = N$$

entonces al hacer $\vec{N}\cdot d\vec{r}$ obtenemos

$$N\hat{\phi}\cdot\left(d\rho\,\hat{\rho} + \rho\frac{\omega_0}{\dot{\rho}}\, d\rho\,\hat{\phi} \right) = N\rho\frac{\omega_0}{\dot{\rho}}\, d\rho$$

$$= 2m\omega_0^2\,\rho\, d\rho$$

así que al integrar entre $t=0$ y $t=t$

$$W_N = \int_{t_0}^{t_f} \vec{N}\cdot d\vec{r} = \int_{\rho_0}^{\rho(t)} 2m\omega_0^2\,\rho\, d\rho = m\omega_0^2\left(\rho^2(t) - \rho_0^2\right) \quad \square$$