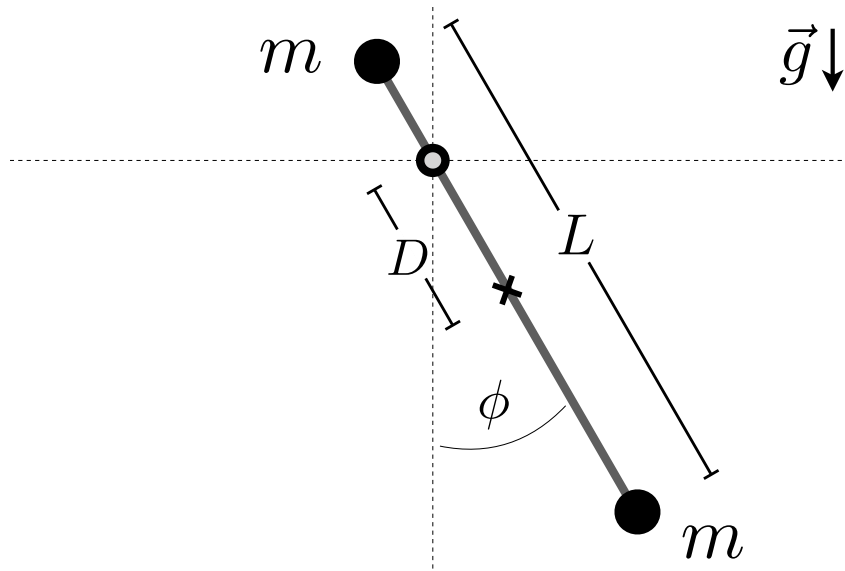


Mecánica FI2001-3

Ejercicio 4: Martes 25 de abril, 2023

Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Francisco Colipi y Javier Huenupi
Ayudantes: Gabriel Marín y Valentina Suárez

Una varilla rígida **sin masa** de largo L tiene dos masas idénticas de valor m adosadas en sus extremos. La varilla puede rotar libremente en torno a un eje ubicado a una distancia $D < L/2$ de su centro, formando un péndulo (ver figura). El ángulo entre la varilla y la vertical está dado por ϕ .

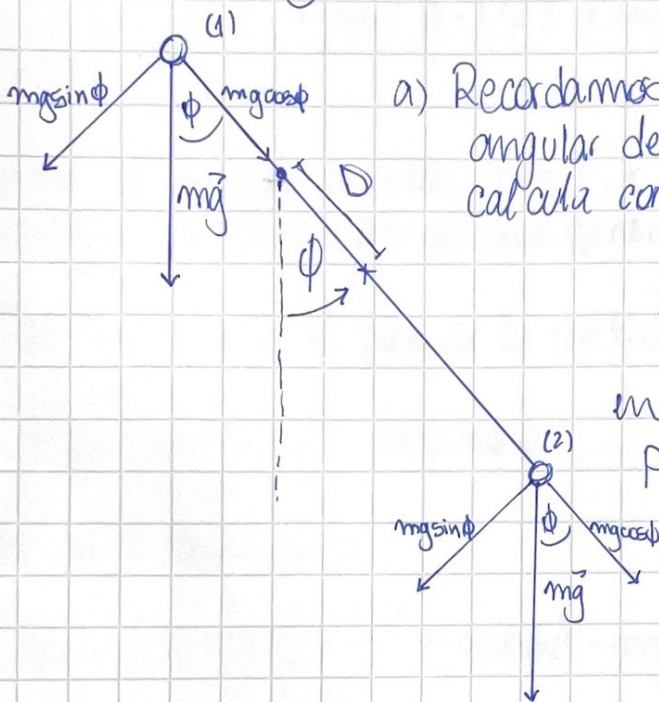


- (a) **2.5pts:** Calcule el momento angular total del sistema con respecto al eje de rotación.
- (b) **2.0pts:** Calcule el torque total del sistema con respecto al eje de rotación.
- (c) **1.5pts:** A partir de sus cálculos anteriores, obtenga la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ .

Recuerde: La posición y velocidad en coordenadas polares vienen dadas por:

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho}, \quad \vec{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi}. \quad (1)$$

Ejercicio 4: Torque



a) Recordamos que el momento angular de cada partícula se calcula como

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

en este problema ambas partículas giran sin cambiar su distancia al origen, por lo que las velocidades en cilíndricas serían

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} = \rho \dot{\phi} \hat{\phi}$$

entonces, para (2) tendríamos $\vec{r}_2 = (D + L/2) \hat{\rho}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{L}_2 &= m(D + L/2) \hat{\rho} \times (D + L/2) \dot{\phi} \hat{\phi} \\ &= m(D + L/2)^2 \dot{\phi} \hat{k} \end{aligned}$$

y para (1) $\vec{r}_1 = (L/2 - D) \hat{\rho}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{L}_1 &= m(L/2 - D) \hat{\rho} \times (L/2 - D) \dot{\phi} \hat{\phi} \\ &= m(L/2 - D)^2 \dot{\phi} \hat{k} \end{aligned}$$

así que el momento angular del sistema sería

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{L}_i = [m(D+L/2)^2 + m(L/2-D)^2] \dot{\phi} \hat{k}$$

b) Para los torques usamos $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, donde para ambas masas, las únicas fuerzas que generan torque es el peso

Descomponiendo el peso de la partícula (2)

$$\vec{F}_{p2} = mg \cos \phi \hat{p} - mg \sin \phi \hat{\phi}$$

así que el torque sería

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_2 &= (D+L/2) \hat{p} \times (mg \cos \phi \hat{p} - mg \sin \phi \hat{\phi}) \\ &= -mg(D+L/2) \sin \phi \hat{k} \end{aligned}$$

y para la partícula (1)

$$\vec{F}_{p1} = -mg \cos \phi \hat{p} + mg \sin \phi \hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{\tau}_1 &= (L/2 - D) \hat{p} \times (-mg \cos \phi \hat{p} + mg \sin \phi \hat{\phi}) \\ &= mg(L/2 - D) \sin \phi \hat{k} \end{aligned}$$

Así que el torque total sería

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{\tau}_i = [-mg(D+L/2) + mg(L/2-D)] \sin \phi \hat{k}$$

c) Usamos la ec. maestra

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow -2mgD \sin\phi \hat{k} = m[2D^2 + L^2/2] \ddot{\phi} \hat{k}$$

tomando solo la parte escalar

$$\Rightarrow [2D^2 + L^2/2] \ddot{\phi} = -2gD \sin\phi$$

con lo que encontramos nuestra ec. de movimiento