Ejercicio 4 - Pequeñas oscilaciones

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudantes: Gerald Barnert

INDICACIÓN DEL EJERCICIO

Este es una evaluación personal, tiene 45 minutos para resolverla y está prohibido todo uso de artefactos electrónicos. Si tiene alguna duda: levante la mano y pregunte en voz alta.

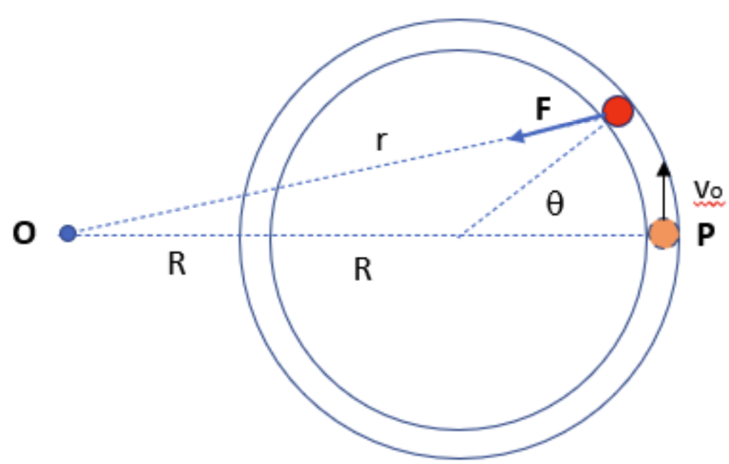
Pregunta

Una partícula de masa m puede moverse por el interior de un tubo que forma un círculo de radio R solo bajo la acción de un campo de fuerza de atracción hacia un punto fijo **O** cuya magnitud es proporcional a la distancia de la partícula a dicho punto. Asuma que no hay fuerza de gravedad. El punto de atracción se encuentra a una distancia $2R$ del centro del círculo.

$$\vec{F} = -kr\hat{r}$$

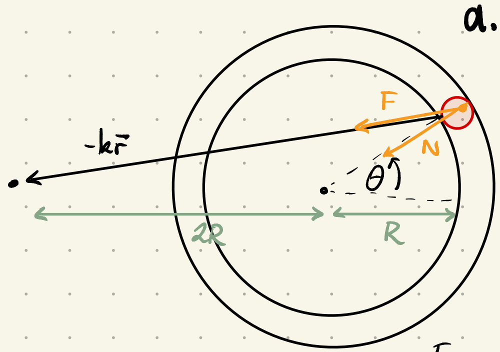
a) Determine los puntos de equilibrio de la partícula en el interior del tubo, identificando los que son inestables y estables.

b) Calcule el periodo de pequeñas oscilaciones alrededor del o de los puntos de equilibrio estable.

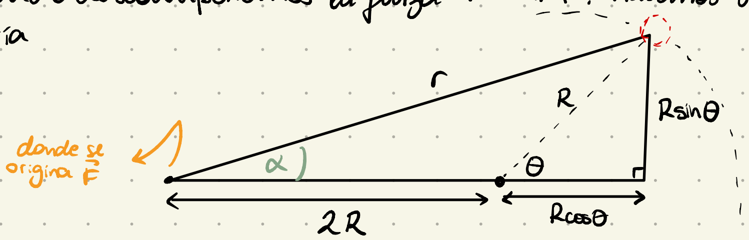


P1

Ejercicio 4



a. Usamos un sist. de coord. polares con centro en el centro del círculo, donde descomponemos la fuerza $\vec{F} = -k\vec{r}$. Hacemos un poco de geometría



Entonces $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ (primero descomponemos en cartesianas y luego pasamos a polares), donde

$$F_x = -|\vec{F}|\cos\alpha \;\wedge\; F_y = -|\vec{F}|\sin\alpha$$

donde por dibujo podemos escribir el cos y sin

$$\Rightarrow F_x = -|\vec{F}|\frac{(R\cos\theta + 2R)}{r} \;\wedge\; F_y = -|\vec{F}|\frac{R\sin\theta}{r}$$

y la distancia r se calcula por pitágoras $\Rightarrow r = \sqrt{R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta + 4R^2\cos\theta + 4R^2}$
$= \sqrt{5R^2 + 4R^2\cos\theta}$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = |-k\vec{r}| = kR\sqrt{5+4\cos\theta}$$

$$\Rightarrow F_x = -kR\cancel{\sqrt{5+4\cos\theta}}\,\frac{(R\cos\theta + 2R)}{R\cancel{\sqrt{5+4\cos\theta}}} = -kR(2+\cos\theta) \;\wedge\; F_y = -kR\sin\theta$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -kR(2+\cos\theta)\hat{i} - kR\sin\theta\hat{j} = -kR(2+\cos\theta)(\cos\theta\hat{\rho} - \sin\theta\hat{\theta}) - kR\sin\theta(\sin\theta\hat{\rho} + \cos\theta\hat{\theta})$$

$$= (-kR\cos\theta(2+\cos\theta) - kR\sin^2\theta)\hat{\rho} + (kR\sin\theta(2+\cos\theta) - kR\cos\theta\sin\theta)\hat{\theta}$$

Además tenemos la fuerza del tubo $N\hat{\rho}$ que cambia de signo para $\theta = \pi/2, 3\pi/2$.
Las ecs. de mov. serían

$$\hat{\rho})\; -mR\dot{\theta}^2 = -2kR\cos\theta - kR + N \quad (1)$$

$$\hat{\theta})\; mR\ddot{\theta} = kR\sin\theta(2+\cos\theta) - kR\cos\theta\sin\theta \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{2k}{m}\sin\theta = 0 \quad (3) \qquad \ddot{\theta} = \frac{2k}{m}\sin\theta$$

Donde hay puntos de equilibrio si $\ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{2\cancel{k}}{\cancel{m}}\sin\theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 \in \{0, \pi\}$$

Para analizar si son estables o inestables calculamos la derivada de la aceleración $d\ddot{\theta}/d\theta = -f(\theta)$

$$\Rightarrow f(\theta) = -\frac{2k}{m}\cos\theta$$

$$\Rightarrow f(0) = -\frac{2k}{m} < 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \text{ es inestable}$$

$$\Rightarrow f(\pi) = \frac{2k}{m} > 0 \Rightarrow \theta_0 = \pi \text{ es estable}$$ } Solo este puede tener pequeñas oscilaciones

b. Para calcular la frecuenc. de pequeñas oscilaciones debemos perturbar θ en torno a π donde γ es pequeño $(\theta \rightarrow \pi + \gamma)$

- $\sin(\pi+\gamma) = \cancel{\sin(\pi)}\cos(\gamma) + \overset{-1}{\cancel{\cos(\pi)}}\,\overset{\approx\gamma}{\cancel{\sin(\gamma)}} \approx -\gamma$
- $\cos(\pi+\gamma) = \overset{-1}{\cancel{\cos(\pi)}}\,\overset{\approx 1}{\cancel{\cos(\gamma)}} - \overset{0}{\cancel{\sin(\pi)}}\sin(\gamma) \approx -1$

Por lo que la ec. de mov. queda $(\ddot{\theta} = (\ddot{\pi+\gamma}) = \ddot{\gamma})$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma} + \frac{2k}{m}\gamma = 0$$

$$\ddot{\gamma} + \frac{2k}{m}\gamma = \ddot{\gamma} + \omega_0^2\gamma = 0$$ } mov. armónico simple

Así que la frecuencia de pequeñas oscilaciones es $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$

Segundo método (este se evaluará):

La normal del tubo no ejerce trabajo. Calculamos el potencial asociado a la fuerza central

$$\vec{F} = -\nabla U_{(r)}$$

$$\Rightarrow -kr\hat{r} = -\frac{\partial U_{(r)}}{\partial r}\hat{r} \quad \Big/ \int dr$$

$$\Rightarrow U - U_0 = \int_{r_0}^{r} kr\,dr$$

$$\Leftrightarrow U - U_0 = \frac{kr^2}{2} + C$$

Escogemos U_0 tq. $\longrightarrow U_{(r)} = \frac{kr^2}{2}$. Así que la energía mecánica **conservada** queda como

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2\right) + \frac{k}{2}r^2 = cte.$$

donde $\dot{\rho} = 0 \ \forall t$ y $\rho = R$ $\Rightarrow E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}r^2$

y debemos expresar r en nuestras coord. polares, anteriormente conseguimos

$$r = \sqrt{5R^2 + 4R^2\cos\theta}$$

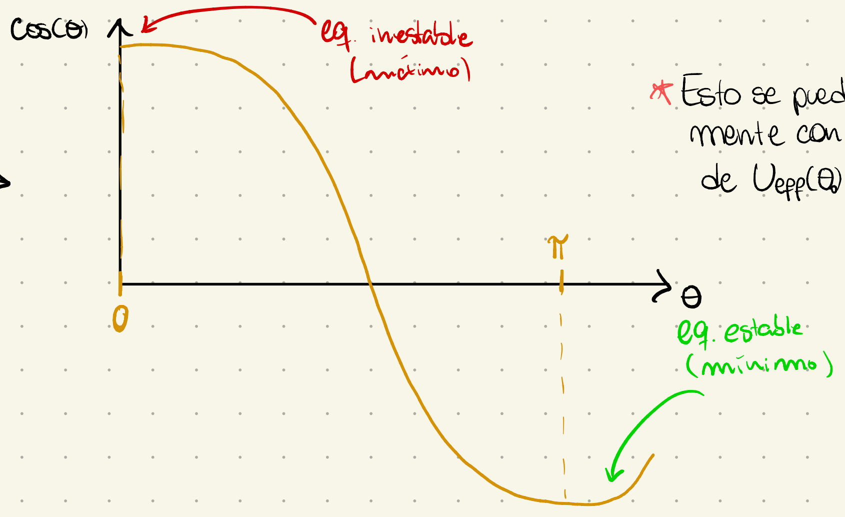
$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}R^2(5 + 4\cos\theta)$$

este es el potencial efectivo

a. Para esta parte debemos encontrar donde el potencial es un mínimo (eq. estable) o un máximo (eq. inestable), para eso derivamos U(θ) c/r al ángulo e igualamos a 0

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta}\Big|_{\theta_0} \sim \sin\theta_0 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \theta_0 \in \{0, \pi\}$$

Analizamos si son estables o inestables



*Esto se puede ver matemáticamente con la segunda derivada de $U_{eff}(\theta)$

b. Tenemos que la energía es de la forma $E = \frac{\alpha}{2}\dot{\theta}^2 + U(\theta)$, por lo que la freq. de pequeñas oscilaciones está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(\theta_0)}{\alpha}}, \text{ donde}$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}\Big|_{\theta_0} = -2kR^2\cos\theta_0 = 2kR^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2kR^2}{mR^2}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$