MECANICA (FI2001) **EJERCICIO 4** 3 diciembre 2021

Prof.: Patricio Aceituno
Prof. Auxiliares: Mauricio Rojas, Edgardo Rosas, Javier Huenupi

Tiempo: 1 hora

Problema 1

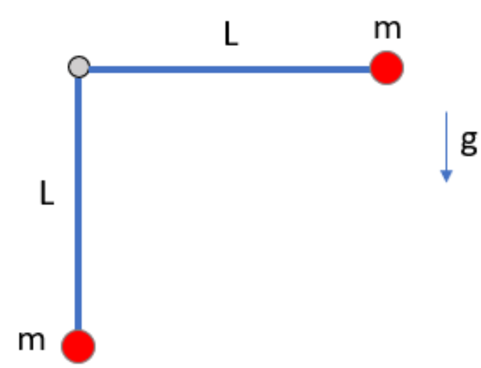
Considere dos barras de largo L cada una, que forman un ángulo de $\pi/2$ entre ellas y que pueden girar con roce despreciable alrededor de un eje horizontal que se encuentre en el punto de unión entre ambas. En el extremo libre de cada barra hay una partícula de masa m. La masa de cada barra es despreciable en comparación con las masas de las partículas.

La estructura se libera desde el reposo, estando una de las barras en posición horizontal. Calcule:

a) Magnitud de la aceleración que experimentan las dos partículas justo en el momento en que se libera la estructura desde el reposo.

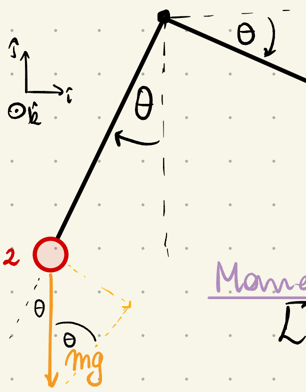
b) Magnitud de la velocidad de las partículas cuando ambas se encuentran a la misma altura, es decir cuando la estructura ha girado en $\pi/4$.

c) Fuerza que el eje ejerce sobre la estructura cuando ambas partículas se encuentran a la misma altura, es decir cuando la estructura ha girado en $\pi/4$.



Ejercicio 4

a. Consideramos que la masa de abajo rotó θ con respecto a la horizontal.
(2 pts) Calcularemos el torque actuando sobre ambas partículas, que considera solo la fuerza de gravedad, ya que la fuerza de las barras es en la misma dirección que el brazo vector; también calcularemos el momento angular para ocupar



$$\vec{\tau}^{ext} = \dot{\vec{L}}$$

Torque

$$\vec{\tau}^{ext} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = -mgL\cos\theta\,\hat{k} + mgL\sin\theta\,\hat{k}$$

Momento de inercia

$$\vec{L} = -Lm(L\dot{\theta})\hat{k} - Lm(L\dot{\theta})\hat{k}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = -mL^2\ddot{\theta}\hat{k} - mL^2\ddot{\theta}\hat{k} = -2mL^2\ddot{\theta}\hat{k}$$

$$\Rightarrow -2\cancel{m}L^{\cancel{2}}\ddot{\theta}\,\cancel{\hat{k}} = \cancel{m}g\cancel{L}\sin\theta\,\cancel{\hat{k}} - \cancel{m}g\cancel{L}\cos\theta\,\cancel{\hat{k}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2L}\cos\theta - \frac{g}{2L}\sin\theta \quad (1) \qquad +0.8$$

Sabemos que la aceleración de cada partícula está dada por

$$\vec{a}_i = (\ddot{\rho}_i - \rho_i\dot{\phi}_i^2)\hat{\rho}_i + (2\dot{\rho}_i\dot{\phi}_i + \rho_i\ddot{\phi}_i)\hat{\phi}_i, \text{ donde } \dot{\rho}_i = \ddot{\rho}_i = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}_i = -\rho_i\dot{\phi}_i^2\hat{\rho}_i + \rho_i\ddot{\phi}_i\hat{\phi}_i$$

Nos falta calcular la velocidad angular, ocupamos (1)

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}' d\theta' = \frac{g}{2L}\int_0^{\theta}\cos\theta\, d\theta - \frac{g}{2L}\int_0^{\theta}\sin\theta\, d\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{2L}\sin\theta + \frac{g}{2L}(\cos\theta - 1) \Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{L}(\sin\theta + \cos\theta - 1)} \qquad +0.8$$

Así que las aceleraciones serían ($\hat{\rho}_i$ y $\hat{\phi}_i$ son de sist. coord. cilíndricas para cada partícula)

$$\vec{a}_{1,2} = -g(\sin\theta + \cos\theta - 1)\hat{\rho}_i + \frac{g}{2}(\cos\theta - \sin\theta)\hat{\phi}_i$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_{1,2}| = \sqrt{g^2(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2 + \frac{g^2}{4}(\cos\theta - \sin\theta)^2} \qquad +0.2$$

En el momento inicial $\theta = 0 \Rightarrow |\vec{a}_{1,2}(t=0)| = \sqrt{\frac{g^2}{4}} = \frac{g}{2}$ $\quad +0.2$

b. La velocidad de la partícula i-ésima está dada por
(2 pts)

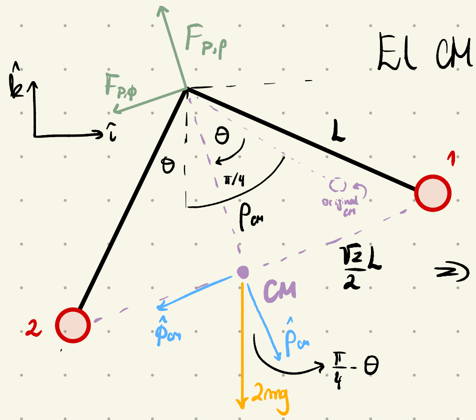
$$\vec{v}_i = \cancel{\dot{\rho}_i\hat{\rho}_i} + \rho_i\dot{\phi}_i\hat{\phi}_i \qquad +0.5$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{1,2} = L\sqrt{\frac{g}{L}(\sin\theta + \cos\theta - 1)}\;\hat{\phi}_i \quad \Rightarrow |\vec{v}_{1,2}| = \sqrt{gL(\sin\theta + \cos\theta - 1)} \qquad +1.0$$

Los partículas se encuentran a la misma altura cuando $\theta = \pi/4$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{1,2}(\theta=\pi/4)| = \sqrt{gL(\sqrt{2}-1)} \quad +0.5$$

C. Sobre las masas actúa la fuerza de gravedad y la fuerza de las barras, nos podemos olvidar de (2pts) esta última considerando la dinámica de CM (la fuerza de las barras es una fuerza interna), que también se ve afectado por la fuerza del pivote



El CM se encuentra a $L^2 = \rho_{CM}^2 + \frac{2}{4}L^2 \Rightarrow \rho_{CM} = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$ del pivote $+0.5$

La ec. de movimiento sería

$$2m\vec{a}_{CM} = 2m\vec{g} + \vec{F}_P$$, con $\vec{F}_P$ la fuerza del pivote $+0.3$

$$\Rightarrow 2m\left(-\rho_{CM}\dot{\phi}_{CM}^2\hat{\rho}_{CM} + \rho_{CM}\ddot{\phi}_{CM}\hat{\phi}_{CM}\right) = -2mg\hat{k} + \vec{F}_P$$

$$\sqrt{2}mL\left(-\dot{\theta}^2\hat{\rho}_{CM} + \ddot{\theta}\hat{\phi}_{CM}\right) = 2mg\left(\cos(\pi/4-\theta)\hat{\rho}_{CM} + \sin(\pi/4-\theta)\hat{\phi}_{CM}\right) + \vec{F}_P$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_P = \sqrt{2}mL\left(-\dot{\theta}^2\hat{\rho}_{CM} + \ddot{\theta}\hat{\phi}_{CM}\right) - 2mg\left(\cos(\pi/4-\theta)\hat{\rho}_{CM} + \sin(\pi/4-\theta)\hat{\phi}_{CM}\right)$$

$$= \left[-\sqrt{2}mg(\sin\theta + \cos\theta - 1) - 2mg\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]\hat{\rho}_{CM}$$

$$+ \left[\sqrt{2}m\frac{g}{2}(\cos\theta - \sin\theta) - 2mg\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]\hat{\phi}_{CM} \quad +0.7$$

Evaluamos en $\theta=\pi/4 \Rightarrow \vec{F}_P = \left[-\sqrt{2}mg(\sqrt{2}-1) - 2mg\right]\hat{\rho}_{CM}$ $+0.5$

$$= \left[-2mg + \sqrt{2}mg - 2mg\right]\hat{\rho}_{CM} = mg(\sqrt{2}-4)\hat{\rho}_{CM} = mg(4-\sqrt{2})\hat{k}$$

* El CM se encuentra justo entremedio de las dos partículas, y como masan lo mismo, está justo al medio. Pueden calcular esta posición R_{cm} con la fórmula para un SRI rotando junto a la estructura y les dará lo mismo