

**Mecánica FI2001-3**  
**Ejercicio 3: Martes 11 de abril, 2022**

**Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Francisco Colipi y Javier Huenupi**  
**Ayudantes: Gabriel Marín y Valentina Suárez**

En la última clase vimos una situación donde se obtuvo una ecuación con la siguiente forma:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + a_0 = 0. \quad (1)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo lineal e inhomogénea. Dicha ecuación se puede resolver en forma exacta (es decir, puede ser integrada dos veces). Sin embargo, en este ejercicio nos interesa integrarla una sola vez.

(a) Realice un cambio de variables de la forma  $y \rightarrow x = y + c$  con el propósito de obtener una ecuación homogénea para  $x$ . ¿Qué valor debe tener  $c$ ?

(b) Multiplique la nueva ecuación por  $\dot{x}$  e intégreala una vez. Recuerde que  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \dot{x} \ddot{x}$  y  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} x^2 \right) = x \dot{x}$ .

(c) Suponga que en  $t = 0$  se cumple  $\dot{y} = 0$  e  $y = y_0$ . Utilice el resultado de la parte (b) para obtener una relación entre  $\dot{y}$ ,  $y$  e  $y_0$  válida para todo tiempo.

### Ejercicio 3

Tenemos la EDO

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + a_0 = 0$$

a) Reescribamosla

$$\ddot{y} + \omega_0^2 \left( y + \frac{a_0}{\omega_0^2} \right) = 0$$

definimos  $x = y + a_0/\omega_0^2$

$$\Rightarrow \dot{x} = \dot{y} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{y}$$

así que

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

b) Con truco de mecánica

$$\dot{x} \frac{dx}{dx} = -\omega_0^2 x \quad \int_{x_0}^x dx$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\dot{x}_0^2}{2} = -\frac{\omega_0^2}{2} (x^2 - x_0^2)$$

donde  $\dot{x} = \dot{y}$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$  y  $x_0 = y_0 + a_0/\omega_0^2$

$$\Rightarrow \dot{y}^2 = -\omega_0^2 \left( \left( y + a_0/\omega_0^2 \right)^2 - \left( y_0 + a_0/\omega_0^2 \right)^2 \right)$$

//