Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de la Universidad
FI2001 – Mecánica

Ejercicio 3 - Energía

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudantes: Gerald Barnert

INDICACIÓN DEL EJERCICIO

Este es una evaluación personal, tiene 45 minutos para resolverla y está prohibido todo uso de artefactos electrónicos. Si tiene alguna duda: levante la mano y pregunte en voz alta.

Pregunta

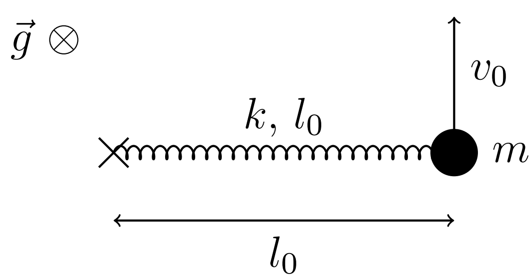
Sobre una superficie horizontal sin roce una partícula de masa m se mueve ligada a un punto fijo mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En el instante mostrado en la figura su velocidad tiene magnitud v_0 y es perpendicular al resorte, el cual se encuentra en su largo natural.

a) Determine el valor de v_0 tal que la máxima longitud que el resorte alcance sea $4l_0$.

b) Determine la máxima y mínima rapidez de la partícula en el movimiento resultante.

Ahora, **considere que existe un roce viscoso** con el aire y se deja pasar suficiente tiempo como para que la masa se detenga por completo.

c) Calcule el trabajo hecho por esta fuerza de roce



Ejercicio 3

Energía

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudante: Gerald Barnert

P1.-

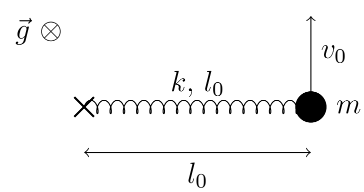
Sobre una superficie horizontal sin roce una partícula de masa m se mueve ligada a un punto fijo mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En el instante mostrado en la figura su velocidad tiene magnitud v_0 y es perpendicular al resorte, el cual se encuentra en su largo natural.

a) Determine el valor de v_0 tal que la máxima longitud que el resorte alcance sea $4l_0$.

b) Determine la máxima y mínima rapidez de la partícula en el movimiento resultante.

Ahora, **considere que existe un roce viscoso** con el aire y se deja pasar suficiente tiempo como para que la masa se detenga por completo.

c) Calcule el trabajo hecho por esta fuerza de roce



Respuesta

Para este problema usamos la conservación de la energía mecánica, ya que no hay fuerzas disipativas, además tenemos que se conserva el momentum angular, debido a que no hay fuerzas actuando en $\hat{\phi}$, así que usando coordenadas polares obtenemos que:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}(\rho^2\dot{\phi})}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \rho^2\dot{\phi} = \text{constante}.$$

Como en un primer instante el resorte se encuentra en su largo natural, solo hay energía cinética dada por la velocidad v_0,

$$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2,$$

y por conservación del momentum angular tenemos que $\rho^2\dot{\phi} = l_0 {v_0}$[1].

Para este caso, la energía mecánica de forma general está dada, en coordenadas polares, por:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2) + \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2.$$

Sabemos que en el momento en el que el resorte alcance su máxima elongación, la masa se detiene en el eje radial (deja de alejarse), o sea, $\dot{r} = 0$, utilizando que la posición en este caso es $4l_0$ y utilizando la conservación del momentum angular, obtenemos que la energía es:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{l_0 v_0}{4l_0}\right)^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2,$$

que tiene que ser igual a la energía inicial,

$$\frac{1}{32}m{v_0}^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$
$$\Rightarrow {v_0}^2 = \frac{48}{5}\frac{k}{m}{l_0}^2.$$

Para calcular la velocidad máxima del movimiento pensamos en que cuando se conserva la energía total se genera un equilibrio entre la energía cinética y la potencial (sumadas deben dar E), entonces la energía cinética (la velocidad) alcanza su máximo valor cuando la energía potencial es 0, en este caso eso sucede cuando el resorte está en su largo natural donde sabemos que la velocidad es v_0,

$$\Rightarrow v_{máx} = v_0.$$

Siguiendo el mismo razonamiento, la energía cinética toma su valor mínimo cuando la potencial alcanza su valor máximo, que para la velocidad v_0 calculada, la elongación máxima es $4l_0$, así que ocupamos que la energía total inicial es igual a la energía mecánica cuando la velocidad es mínima,

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_{mín}}^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2$$
$$\Rightarrow {v_{mín}}^2 = \frac{3}{5}\frac{k}{m}{l_0}^2$$

Para finalizar, consideremos que existe un roce viscoso con el aire. Realmente no nos importa la forma exacta que tenga, ya que no estamos buscando, por ejemplo, la trayectoria en todo punto.

Para calcular el trabajo ejercido por una fuerza conservativa pordemos usar dos fórmulas:

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

o

$$W = \Delta E = E_f - E_0,$$

como no conocemos exactamente la forma de la fuerza de roce $\vec{F}_{\text{roce}}$, ocupamos esta segunda fórmula.

[1] Ojo que esto es válido solo porque v_0 es perpendicular al vector $\hat{\rho}$, por lo que sería exactamente la velocidad tangencial ($\dot{\rho}_0 = 0$)

La energía inicial sigue siendo

$$E_0 = K_0 = \frac{1}{2} m {v_0}^2,$$

mientras que para la energía final, nos damos cuenta que por enunciado, la masa se para por completo, por lo que la energía cinética sería 0, y ¿cuál sería la energía potencial?, bueno, como la fuerza de roce viscoso depende de la velocidad, si la velocidad de la partícula es 0, la fuerza de roce también es 0, por lo que no hay nada que contraiga o estire el resorte, así que este tendería a estar en su largo natural, donde la fuerza elástica también (y por lo tanto la energía potencial también) es 0. Por lo que la energía mecánica final es

$$E_f = 0,$$

y reemplazando en la fórmula del trabajo hecho por el roce (que sería la única fuerza no conservativa)

$$W_{\text{roce}} = -\frac{1}{2} m {v_0}^2,$$

que significa que el roce le quitó toda la energía al sistema.