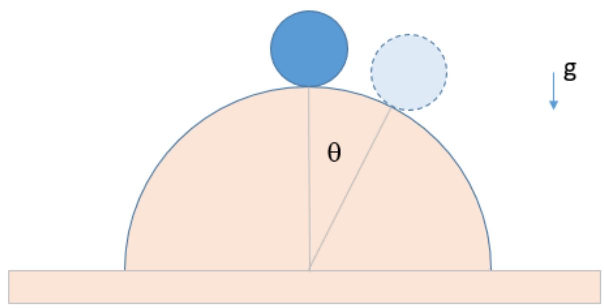
MECÁNICA (FI 2001-2) **EJERCICIO 3** Fecha: 01 julio 2022

Profesor: Patricio Aceituno

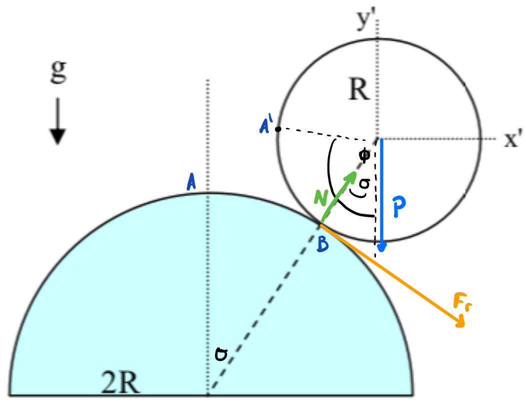
Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas

Considere una esfera de masa **M** y radio **r** que se encuentra en reposo sobre una semi-esfera fija de radio **R**. En el algún momento la esfera sale del punto de equilibrio y empieza a rodar sin resbalar sobre la semi-esfera debido a existencia de un roce estático en la superficie de contacto (coeficiente μ_e)

a) Escriba la ecuación de movimiento del centro de masa de la esfera
b) Escriba la ecuación que describe la rotación de la esfera alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
c) Encuentra una expresión para la fuerza de roce estático en función del ángulo θ, mientras que la esfera rueda sin resbalar sobre la semi-esfera (antes que empiece a deslizar).



Prob. 2 Un disco de radio R y masa m se encuentra en el punto más alto de un semi-cilindro de radio 2R, con el cual tiene un coeficiente de roce estático μ_e . En un cierto instante una pequeña perturbación saca el disco de su posición de equilibrio, y comienza a rodar sin resbalar sobre el semi-cilindro.



a) Demuestre que cuando el centro del disco se ha movido en un ángulo θ, el disco ha girado un ángulo $\phi = 3\theta$ respecto del sistema móvil (x'.y') que se traslada asociado a su centro de masa.

b) Escriba una ecuación de movimiento del centro de masa del disco, respecto de un sistema fijo, y la ecuación de movimiento del disco que representa su rotación respecto del sistema móvil que se traslada asociado a su centro de masa. (nota: identifique claramente las fuerzas que actúan y los ejes de los sistemas de referencia que utilice).

c) Determine una ecuación para el ángulo θ^* en el cual se produce deslizamiento en la superficie de contacto entre el disco y el semi-cilindro.

Nota: el momento de inercia del disco respecto de un eje perpendicular a él, que pasa por su centro, es $I = 1/2\ m R^2$. Considere como datos conocidos m, R, μ_e

a) Se toma como eje para medir ϕ un eje paralelo a $\hat{j}$ y A' el punto del disco que estaba en contacto con el punto más alto del semicírculo A

Entonces, como rueda sin resbalar, el arco AB debe ser igual al arco A'B

$$\Leftrightarrow 2\cancel{R}\theta = \cancel{R}(\phi - \theta)$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2\theta + \theta = 3\theta \quad \square$$

b) Ocupamos Newton y coordenadas polares

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$$

Las fuerzas implicadas

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F_R}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = N\hat{\rho} - Mg\cos(\theta)\hat{\rho} + Mg\,sen(\theta) + F_R\hat{\theta}$$

$$\hat{\rho})\quad -3MR\dot{\theta}^2 = N - Mg\cos(\theta) \quad (1)$$

$$\hat{\theta})\quad 3MR\ddot{\theta} = F_R + Mg\,sen(\theta) \quad (2)$$

Ahora se procede con momento de inercia y torque

$$I_{CM}\ddot{\Phi} = \vec{\tau}_{CM}^{\,ext}$$

$$\vec{\tau}_{CM}^{\,ext} = R\hat{\rho}' \times {}^{-}F_r\hat{\Phi} \longrightarrow \text{signo menos forzado}$$

$$= -RF_r\hat{k}$$

$$\Rightarrow 3I_{CM}\ddot{\theta} = {}^{-}RF_r \quad (3)$$

Reemplazando (2) en (3)

$$3I_{CM}\ddot{\theta} = R(-3mR\ddot{\theta} + mg\,sen(\theta))$$

$$3\ddot{\theta}(I_{CM} + mR^2) - mgR\,sen(\theta) = 0$$

Método Euler-Lagrange

m)

$$\left.\begin{aligned} x &= 3R\,sen(\theta) \\ y &= 3R\cos(\theta) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= 3R\cos(\theta)\cdot\dot{\theta} \\ \dot{y} &= -3R\,sen(\theta)\dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2}m9R^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}I_{CM}9\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m9R^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{9\dot{\theta}^2}{2}\left(I_{CM} + mR^2\right)$$

$$V = mg\,3R\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - V$$

$$\mathcal{L} = \frac{9\dot{\theta}^2}{2}\left(I_{CM} + mR^2\right) - 3mgR\cos(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 3mgR\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 9\dot{\theta}\left(I_{CM} + mR^2\right) \xrightarrow{dt} 9\ddot{\theta}\left(I_{CM} + mR^2\right)$$

$$\Rightarrow 9\ddot{\theta}\left(I_{CM} + mR^2\right) - 3mgR\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$$

$$3\ddot{\theta}\left(I_{CM} + mR^2\right) - mgR\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$$

Ocupando $I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2$

$$\Rightarrow 3\ddot{\theta} \cdot \frac{3}{2}\cancel{m}R^{\cancel{2}} - \cancel{m}g\cancel{R}\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$$

$$9R\ddot{\theta} - 2g\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{9R}g\,\mathrm{sen}(\theta) \quad (4)$$

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{2}{9R}g\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \Big/ \int_0^{\theta} d\theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{2g}{9R}\int_0^{\theta} \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{4g}{9R}\cos(\theta)\Big|_0^\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{4g}{9R}\left(\cos(\theta)-1\right) \quad (5)$$

c) Necesariamente $F_r = \mu N$

(5) en (1) $\rightarrow -\cancel{3}M\cancel{R}\cdot -\frac{4g}{\cancel{9}_3\cancel{R}}\left(\cos(\theta)-1\right) = N - Mg\cos(\theta)$

(4) en (2) $\rightarrow \cancel{3}M\cancel{R}\,\frac{2}{\cancel{9}_3\cancel{R}}g\,\mathrm{sen}(\theta) = F_r + Mg\,\mathrm{sen}(\theta)$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}gM\,\mathrm{sen}(\theta) - Mg\,\mathrm{sen}(\theta) = \mu\left(\frac{4g}{3}\left(\cos(\theta)-1\right) + Mg\cos(\theta)\right)$$