MECANICA (FI2001) **EJERCICIO 3** 12 noviembre 2021

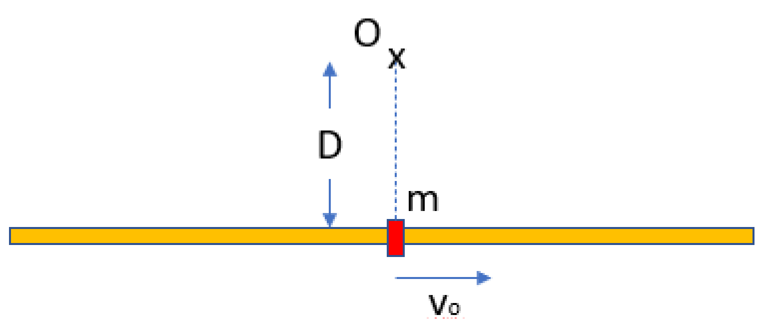
Prof.: Patricio Aceituno
Prof. Auxiliares: Mauricio Rojas, Edgardo Rosas, Javier Huenupi

Tiempo: 1 hora

Problema 1

Considere un anillo de masa **m** que se puede mover sin roce a lo largo de una barra. La única fuerza externa, además de la fuerza normal que ésta ejerce sobre el anillo, es una fuerza atractiva del tipo **F** = - c/ρ hacia un punto O, donde ρ es la distancia a dicho punto (no hay fuerza gravitacional), y c es una constante positiva. La barra se encuentra a una distancia D del punto de atracción.

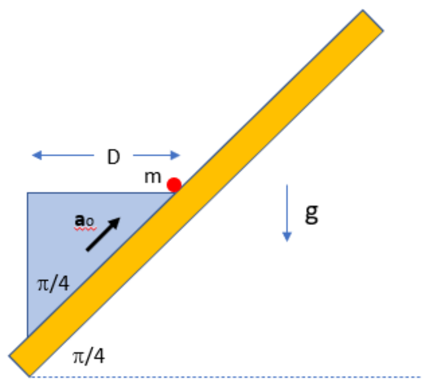
Si estando el anillo en reposo en el punto más cercano al punto de atracción, como se indica en la figura adjunta, se le da una velocidad v_o calcule la máxima distancia que el anillo se aleja del punto inicial.



Problema 2

Una cuña de lado D y ángulo $\alpha = \pi/4$ es forzada a moverse a partir del reposo, con una aceleración constante $\mathbf{a}_o$ a lo largo de una rampa inclinada en un ángulo $\pi/4$ con respecto a la horizontal. Como resultado del movimiento de la rampa una partícula de masa **m** que se encuentra en reposo en el extremo derecho de la superficie horizontal se pone en movimiento relativo respecto de la rampa.

Determine el tiempo que tarda la partícula en llegar al extremo izquierdo de la superficie horizontal de la rampa.



Pauta Ejercicio 3

Dinámica y SRNI

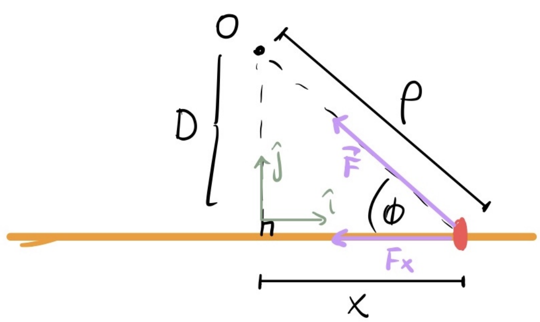
Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.- (Hay dos formas de resolver este problema)

Forma 1: Newton

Tenemos que la fuerza es inversamente proporcional a la distancia de la masa m al punto **O**. Luego de moverse una distancia x hacia la derecha siguiendo la dirección de la barra, podemos dibujar un triángulo rectángulo de hipotenusa ρ y catetos D y x, por lo que,

$$\rho = \sqrt{D^2 + x^2} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{c}{\sqrt{D^2 + x^2}}\hat{\rho}.$$



Solo nos interesa la fuerza en la dirección de la barra (eje x), por lo que debemos encontrar la componente de la fuerza $\vec{F}$ sobre la barra, por geometría del triángulo dibujado anteriormente, tenemos:

$$F_x = -|\vec{F}|\cos\phi,$$

con el ángulo ϕ el formado por ρ y la horizontal. Tenemos que el coseno lo podemos escribir como:

$$\cos\phi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{D^2 + x^2}},$$

entonces,

$$F_x = -\frac{c}{\sqrt{D^2 + x^2}}\frac{x}{\sqrt{D^2 + x^2}} = -\frac{cx}{D^2 + x^2},$$

con lo que podemos escribir la ecuación de movimiento en el eje x (eje de la barra), y ocupar trucazo de mecánica para integrar entre las condiciones iniciales $x_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = v_0$ y la condición final

$x_f = x_{máx}$ y $\dot{x}_f = 0$,

$$m\ddot{x} = -\frac{cx}{D^2 + x^2}$$
$$m\int_{v_0}^{0} \dot{x}d\dot{x} = -c\int_{0}^{x_{máx}} \frac{x}{D^2 + x^2}dx$$
$$m{v_0}^2 = c\ln\left(D^2 + x^2\right)\Big|_{0}^{x_{máx}}$$
$$\frac{m}{c}{v_0}^2 = \ln\left(D^2 + x_{máx}^2\right) - 2\ln\left(D\right)$$
$$x_{máx} = \pm\sqrt{\exp\left(\frac{m}{c}{v_0}^2 + 2\ln\left(D\right)\right) - D^2} = \pm D\sqrt{\exp\left(\frac{m{v_0}^2}{c}\right) - 1},$$

el signo $\pm$ nos indica que la partícula oscila de izquierda a derecha llegando a la misma distancia de la posición original, pero como la velocidad v_0 se aplica hacia la derecha, tomamos la primera vez que se detiene, o sea el signo positivo

$$x_{máx} = D\sqrt{\exp\left(\frac{m{v_0}^2}{c}\right) - 1}$$

Forma 2: Energía

Para hacerlo con energía, calculamos el potencial considerando que $\vec{F} = -\frac{c}{\rho}\hat{\rho}$,

$$\vec{F} \cdot d\vec{\rho} = -dV$$
$$\Rightarrow V = c\ln\rho,$$

como no hay energías disipativas, se conserva la energía mecánica,

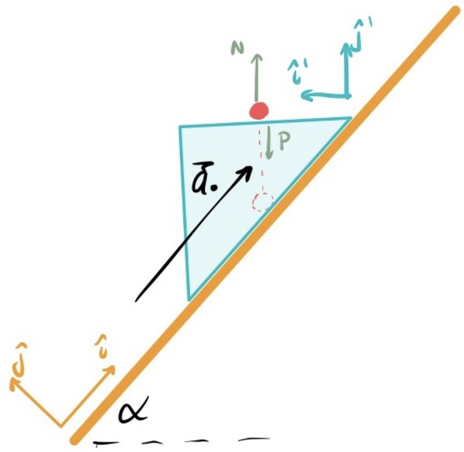
$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + c\ln D = 0 + c\ln\rho_{máx}$$
$$\Rightarrow \rho_{máx} = D\exp\left(\frac{m{v_0}^2}{2c}\right),$$

por la misma geometría de antes (pitágoras) tenemos que,

$$\rho_{máx}{}^2 = D^2 + x_{máx}{}^2$$
$$\Rightarrow x_{máx} = D\sqrt{\exp\left(\frac{m{v_0}^2}{c}\right) - 1}$$

P2.-

Definimos un sistema de referencia no inercial en el extremo derecho de la superficie horizontal de la cuña $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ que se mueve de forma acelerada con respecto a la rampa que es un sistema de referencia inercial, también definimos un sistema de coordenadas cartesiano $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ en el extremo inferior de la rampa con el eje $\hat{i}$ paralelo a la superficie de la rampa.



Debido a que no hay rotación ($\Omega = 0$), la ecuación que define la dinámica de la partícula **visto desde la cuña** (el SRNI) es:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}, \tag{1}$$

con $\vec{F}$ la sumatoria de las fuerzas reales, que en este caso es la fuerza peso $-mg\hat{j}'$ y la normal $N\hat{j}'$.

Tenemos que $\ddot{\vec{R}} = a_0\hat{i}$, pero como queremos conocer el movimiento visto desde la cuña, pasamos este $\hat{i}$ al SRNI como:

$$\ddot{\vec{R}} = a_0\hat{i} = a_0(-\cos\alpha\hat{i}' + \sin\alpha\hat{j}'),$$

por lo que (1) nos queda como (usando que $\vec{a}' = \ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}'\hat{j}'$):

$$m(\ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}'\hat{j}') = -mg\hat{j}' + N\hat{j}' - ma_0(-\cos\alpha\hat{i}' + \sin\alpha\hat{j}'),$$

Como visto desde la cuña no hay movimiento en $\hat{j}'$ (la partícula no atraviesa la cuña ni se despega de ella), las fuerzas en este eje sumadas dan 0. Definimos la ecuación escalar para $\hat{i}'$,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= ma_0\cos\alpha \\ \Rightarrow \dot{x}'(t) &= a_0\cos\alpha t \\ \Rightarrow x'(t) &= \frac{1}{2}a_0\cos\alpha t^2, \end{aligned}$$

donde consideramos que la partícula parte en la posición $x'_0 = 0$ y con velocidad nula. La condición para que la partícula llegue al borde de la cuña es que $x'(t_f) = D$, imponemos esto y despejamos el tiempo.

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}a_0\cos\alpha {t_f}^2 \\ t_f &= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}D}{a_0}} \end{aligned}$$