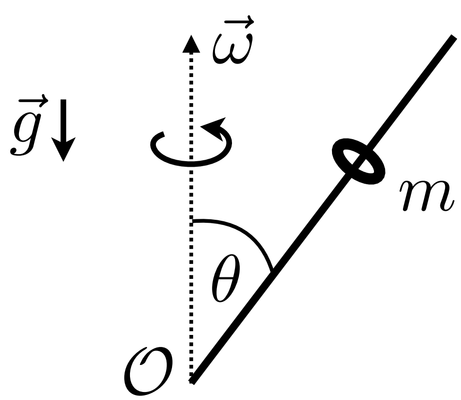
Mecánica FI2001-2
Ejercicio 2: Lunes 1 de abril, 2024

Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Javier Huenupi y Eduardo Droguett
Ayudantes: Thiare González y Lukas Philippi

Una argolla de masa m puede deslizar sin roce a lo largo de una varilla que gira con velocidad angular uniforme $\dot{\phi} = \omega$, siempre formando un ángulo θ constante con la vertical.

(a) Determine la forma de la fuerza de gravedad que actúa sobre m.

(b) Usando una fuerza normal de la forma $\vec{N} = N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi}$, escriba la segunda ley de Newton, y encuentre la ecuación de movimiento que determina la distancia r de la argolla al origen de la varilla $\mathcal{O}$.

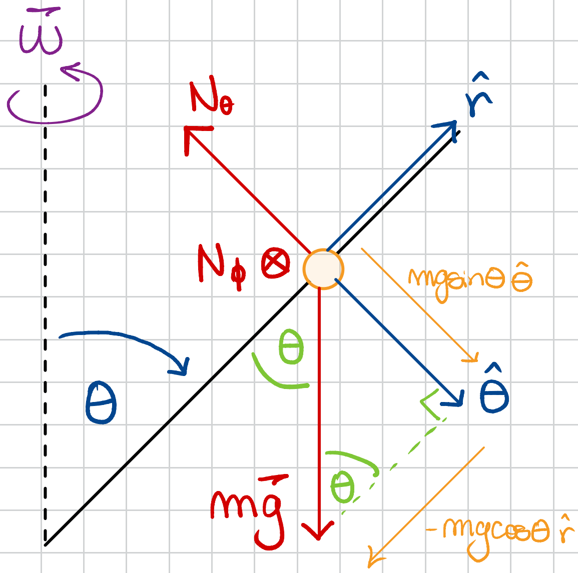


Recuerde: La velocidad y aceleración en coordenadas esféricas son

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi},$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right)\right]\hat{\phi}.$$

Ejercicio 2



a) Sabemos que el peso va en $-\hat{k}$, pero debemos descomponer esta fuerza en el sist. $\{\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi}\}$
Por trigonometría tenemos

$$m\vec{g} = mg\sin\theta\,\hat{\theta} - mg\cos\theta\,\hat{r} \quad (2\text{ pts.})$$

b) Solo tenemos 2 fuerzas sobre m:

- Gravitacional: $\vec{F}_P = mg\sin\theta\hat{\theta} - mg\cos\theta\hat{r}$
- Normal: $\vec{N} = N_\theta\hat{\theta} + N_\phi\hat{\phi}$

y para la aceleración debemos considerar

- $\theta = cte. \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ 　 - $\dot{\phi} = \omega \Rightarrow \phi = \omega t \;\wedge\; \ddot{\phi} = 0$,

así que sería

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\cancel{\dot{\theta}^2}^{=0} - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{r} + (\cancel{r\ddot{\theta}}^{=0} + \cancel{2\dot{r}\dot{\theta}}^{=0} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin\theta\,\dot{\phi})\,\hat{\phi}$$

$$= (\ddot{r} - r\sin^2\theta\,\omega^2)\hat{r} - r\sin\theta\cos\theta\,\omega^2\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin\theta\,\dot{\phi})\,\hat{\phi},$$

por lo que segunda Ley de Newton sería:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow m(\ddot{r} - r\sin^2\theta\,\omega^2)\hat{r} - m\,r\sin\theta\cos\theta\,\omega^2\,\hat{\theta} + \frac{m}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin\theta\,\dot{\phi})\,\hat{\phi}$$
$$= mg\sin\theta\hat{\theta} - mg\cos\theta\hat{r} + N_\theta\hat{\theta} + N_\phi\hat{\phi}$$

de donde obtenemos la EoM para r con $\hat{r}$)

$$\hat{r})\quad m(\ddot{r} - r\sin^2\theta\,\omega^2) = -mg\cos\theta \quad (4\text{ pts.})$$

que es una EDO de segundo orden, inhomogénea y de coef. constantes