MECÁNICA (FI 2001-2) **EJERCICIO 2** Fecha: 25 abril 2022

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas

Considere una partícula de masa **m** que se mueve en línea recta (eje x) por la acción de dos fuerzas, una de atracción ($\mathbf{F}_1$) y otra de repulsión ($\mathbf{F}_2$) que actúan sobre ella:

$$\mathbf{F}_1 = -\,2m/x^2 \qquad\qquad \mathbf{F}_2 = 4m/x^3$$

a) Determine una expresión para la función de potencial V(x) asociada a la fuerza neta (**F**) que actúa sobre la partícula.

b) Si la partícula se libera desde el reposo en la posición x = 1, determine la máxima rapidez que alcanza en el movimiento resultante.

c) Determine si existen posiciones de equilibrio y calcule el periodo de las pequeñas oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio estable.

Ejercicio 2

P1

a) La fuerza total sobre la partícula es $\sum_i \vec{F}_i = m\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\hat{\imath}$. Sabemos que el potencial se calcula como $-\nabla V = \vec{F}$, en este caso tenemos

$$m\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\hat{\imath} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath}$$

gradiente en cartesianas / $\partial_y V = \partial_z V = 0$

integramos y nos olvidamos de $\hat{\imath}$

$$\Rightarrow m\int_{x_0}^{x}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx = \int_{V_0}^{V} dV$$

$$\Leftrightarrow V(x) - V_0 = m\left(-\frac{2}{x}\Big|_{x_0}^{x} + \frac{2}{x^2}\Big|_{x_0}^{x}\right)$$

$$\Rightarrow V(x) = -\frac{2m}{x} + \frac{2m}{x^2}$$

Donde impusimos que las constantes de integración sumadas son 0 (podemos definir que nuestro potencial es 0 donde queramos)

b) Usamos conservación de la energía mecánica (no tenemos fuerzas disipativas)

$$E_{ini} = \cancel{K_{ini}}^{0} + V_{ini} = V(x=1) = -2m + 2m = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{2m}{x} + \frac{2m}{x^2}}_{E} = 0 \quad \forall t$$

Minimizamos la energía mecánica derivando e igualando a 0

$$\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x=x_f} = \frac{2m}{x_f^2} - \frac{4m}{x_f^3} \overset{!}{=} 0 \quad / \cdot x_f^3$$

$$\Rightarrow 2x_f - 4 = 0 \Leftrightarrow x_f = 2$$

Reemplazamos en la expresión de la energía mecánica y despejamos $\dot{x}(x=x_f) = \dot{x}_{max}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}\dot{x}_{max}^2 = \frac{2\cancel{m}}{x_f} - \frac{2\cancel{m}}{x_f^2}$$

$$\Rightarrow |\dot{x}_{máx}| = +\sqrt{\frac{4}{2}-\frac{4}{4}} = \sqrt{2-1} = 1$$

c) Ya encontramos la posición donde $\partial_x V(x) = 0$, o sea, x_f es un punto de equilibrio y para saber si es estable o no tomamos la segunda derivada $\partial_{xx} V(x)$ (con la que analizamos la concavidad

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=x_f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2m}{x^2} - \frac{4m}{x^3}\right)\Bigg|_{x=x_f}$$

$$= -\frac{4m}{x_f^3} + \frac{12m}{x_f^4} = -\frac{4m}{8} + \frac{12m}{16} = m\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) > 0$$

por lo que $\partial_{xx} V(x_f) > 0$, así que x_f es un punto de equilibrio **estable**.

Debido a la forma de la energía mecánica, la frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{V''(x_f)}{m}} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

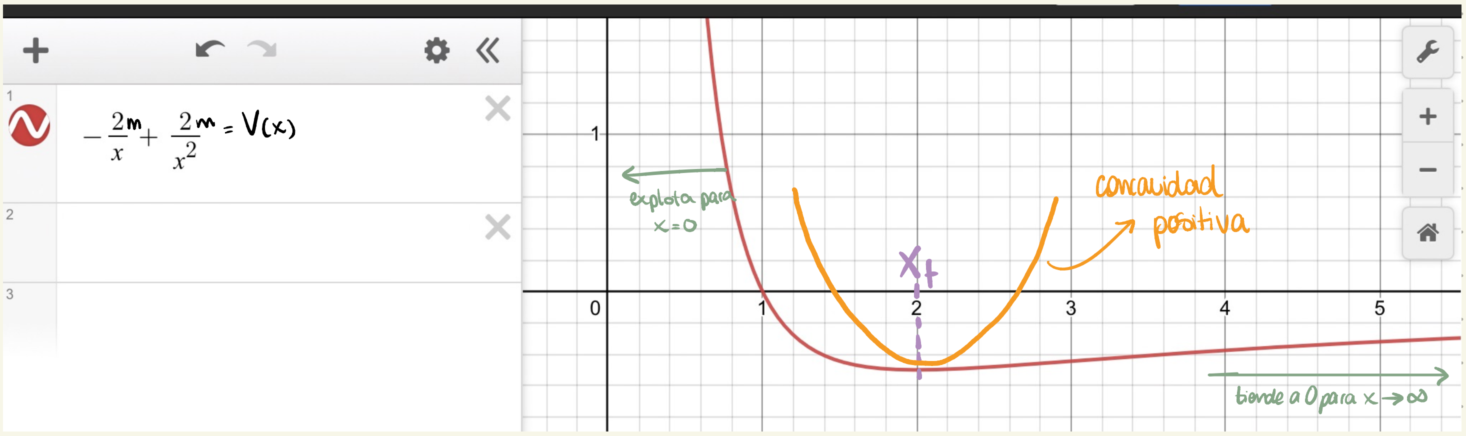

Fig 1: Gráfico del potencial