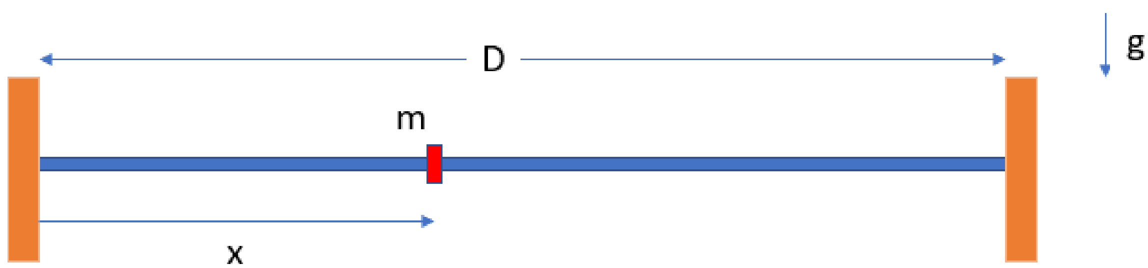
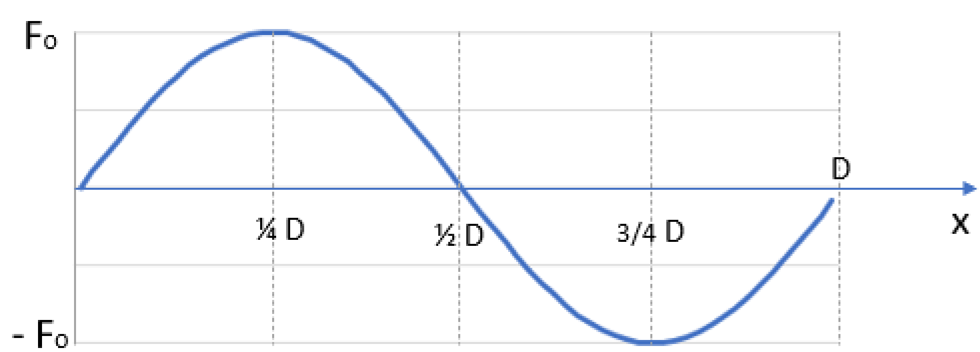
MECANICA (FI2001) **EJERCICIO 2** 22 octubre 2021

Prof.: Patricio Aceituno
Prof. Auxiliares: Mauricio Rojas, Edgardo Rosas, Javier Huenupi

Considere un anillo de masa **m** que se puede mover libremente (sin roce) a lo largo de una barra horizontal de largo D, bajo la acción de un campo de fuerza descrito por la expresión siguiente:

F = F(x) **i** donde $F(x) = F_o \text{ sen } (2\pi\, x/D)$ (ver diagrama esquemático adjunto).





a) A partir de un análisis visual del diagrama que muestra el comportamiento de la fuerza F(x) indique cuáles son los puntos de equilibrio estable e inestable.

b) Determine el valor máximo de aceleración del anillo al moverse en la barra. ¿Depende éste valor de la velocidad inicial que se le dé al anillo?.

c) Determine una función de potencial asociada a ese campo de fuerza, y grafíquela esquemáticamente en función de x

Suponga que el anillo se libera desde el reposo en la posición $x_o = D/4$. En base solo a consideraciones de energía y utilizando el diagrama que describe el potencial en función de x, determine:

d) La distancia máxima que el anillo se aleja de la posición inicial $x_o = D/4$

e) La rapidez máxima del anillo en el movimiento resultante.

f) ¿Qué rapidez inicial mínima, en el sentido de x creciente, habría que darle al anillo al lanzarlo desde la posición $x_o = D/4$ para que alcance a llegar al extremo derecho de la barra.

Pauta Ejercicio 2

Dinámica

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

a.- (1.0 pts)

Sabemos que los puntos de equilibrio se dan cuando la fuerza en ese punto es 0, que es lo mismo a decir que la primera derivada del potencial es 0 (un mínimo o máximo del potencial). Por el gráfico de la forma de la fuerza, Figura 2, notamos que la fuerza es 0 en:

$$x_{eq} = 0,\ \frac{D}{2}\ \wedge\ D,$$

que son nuestros puntos de equilibrio.

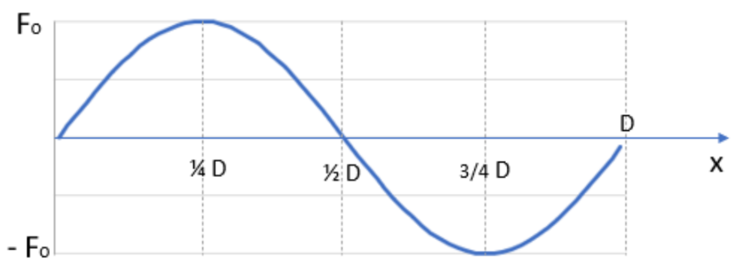


Figura 1

Ahora, para saber si son estables o inestables debemos analizar el signo de la primera derivada de la fuerza (la segunda derivada del potencial),

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{2\pi F_0}{D}\cos\left(\frac{2\pi x}{D}\right) = -\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2},$$

evaluamos en cada punto de equilibrio,

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_0 = -\frac{2\pi F_0}{D}\cos(0) < 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{\frac{D}{2}} = -\frac{2\pi F_0}{D}\cos(\pi) > 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_D = -\frac{2\pi F_0}{D}\cos(2\pi) < 0,$$

por lo que $x_{eq} = 0,\ D$ son puntos de equilibrio inestables y $x_{eq} = D/2$ es estable.

$\boxed{\textbf{b.-}}$ (1.0 pts)

Por segunda ley de Newton tenemos que

$$ma = F \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m}\sin\left(\frac{2\pi x}{D}\right),$$

como tenemos una función sinusoidal, sabemos que su máximo es 1, así que la aceleración máxima es:

$$a_{máx} = \frac{F_0}{m}.$$

$\boxed{\textbf{c.-}}$ (1.0 pts)

Para calcular el potencial usamos la fórmula $\vec{F} = -\nabla V$, como solo tenemos movimiento en el eje x:

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V = -\int F dx = -F_0 \int \sin\left(\frac{2\pi x}{D}\right) dx = \frac{F_0 D}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{D}\right) + V_0,$$

donde el potencial 0 se puede definir en cualquier parte así que consideramos $V_0 = 0$ (también lo tienen si definen sus límites de integración como $D/4$ y x),

$$\Rightarrow V(x) = \frac{F_0 D}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{D}\right).$$

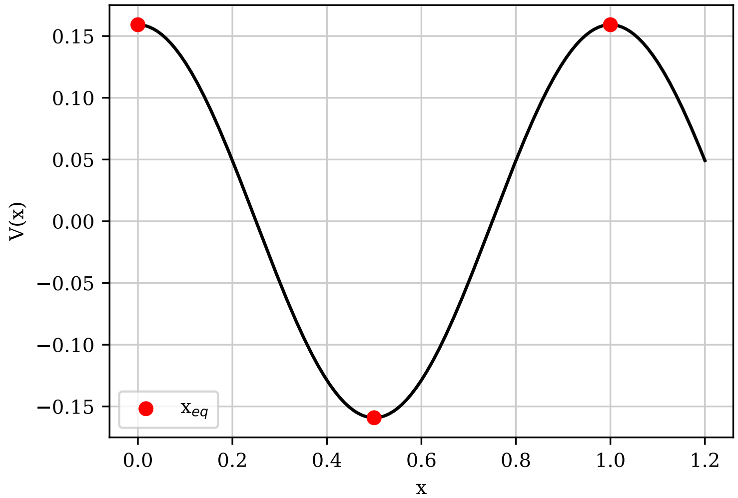


Figura 2: Gráfica de $V(x)$ con $D = F_0 = 1$, junto con los puntos de equilibrio.

$\boxed{\textbf{d.-}}$ (1.0 pts)

La energía viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{F_0 D}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{D}\right).$$

Para la energía inicial tenemos $\dot{x}_0^2 = 0$ y $x_0 = D/4$,

$$\Rightarrow E = \cancelto{0}{\frac{1}{2}m\dot{x}_0^2} + \frac{F_0 D}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi D/4}{D}\right) = \frac{F_0 D}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Por lo que la energía cumple

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{F_0 D}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{D}\right) = 0.$$

Para calcular la distancia máxima ocupamos que en ese punto la partícula se detiene, $\dot{x} = 0$, reemplazamos,

$$\Rightarrow E = \cancelto{0}{\frac{1}{2}m\dot{x}^2} + \frac{F_0 D}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x_{máx}}{D}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi x_{máx}}{D}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{2\pi x_{máx}}{D} = \frac{\pi}{2} \ \vee \ \frac{3\pi}{2},$$

la primera opción nos da $x_{máx} = D/4$ que es la posición inicial, así que no la consideramos, mientras que con la segunda:

$$x_{máx} = \frac{3D}{4},$$

así que la distancia a $D/4$ es $\Delta x = D/2$.

Viendo el gráfico del potencial, tenemos que la energía es constante igual a 0, por lo que la masa está encerrada en un pozo de potencial entre $x = D/4$ y $x = 3D/4$ que se encuentran a la misma distancia del punto de equilibrio $x_{eq} = D/2$, como se ve en la Figura 3, así que el punto más lejano al que llega es $x = 3D/4$.

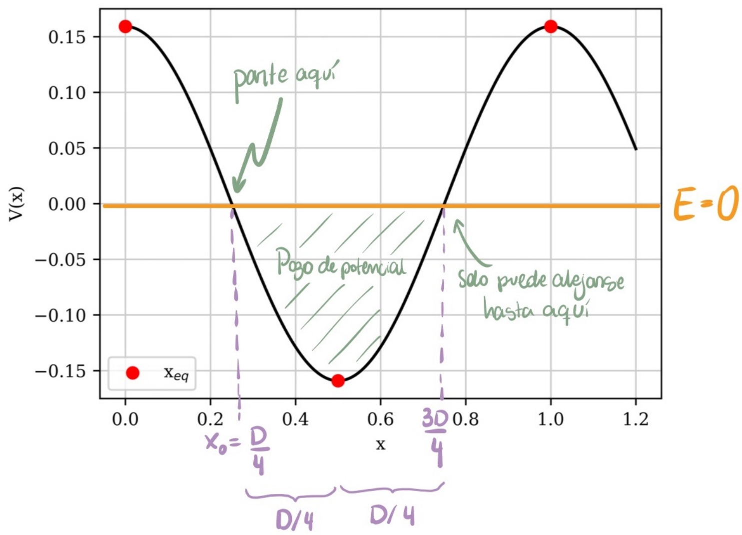


Figura 3

e.- (1.0 pts)

La rapidez máxima se da cuando la energía cinética es máxima, que se da cuando la energía potencial es mínima. Como la energía potencial es una función sinusoidal, el mínimo se da cuando

$$\cos\left(\frac{2\pi x}{D}\right) = -1$$
$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{F_0 D}{2\pi} = 0$$
$$\Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{F_0 D}{m\pi}}.$$

Viendo el gráfico de la energía potencial, tenemos que para obtener la máxima velocidad, la partícula se debe encontrar en la posición donde exista la mayor diferencia entre la energía mecánica y la energía potencial, que es cuando $x = D/2$, ver Figura 4, por lo que toda la diferencia entre la energía mecánica y la potencial es energía cinética, así que sería:

$$K_{máx} = E - V(x = D/2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2_{máx} = 0 - \frac{F_0 D}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi D/2}{D}\right),$$

de donde se despeja $\dot{x}_{máx}$.

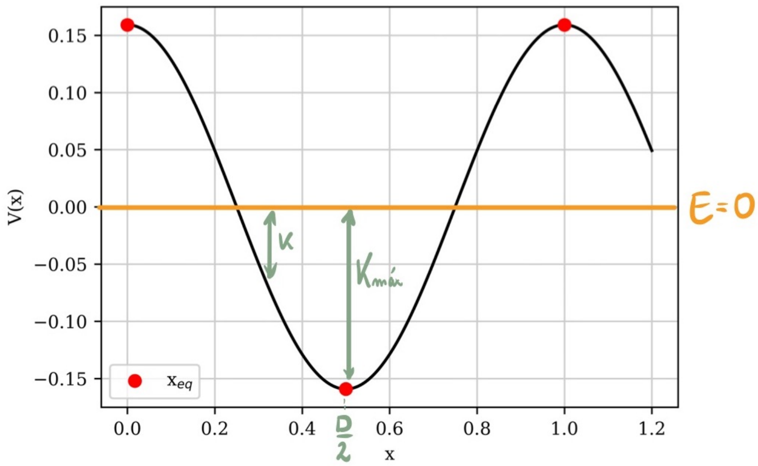


Figura 4: Caption

f.- (1.0 pts)

Calculemos la energía final (que es la misma en todo el movimiento, ya que se conserva), que es cuando la masa llega a la posición $x_f = D$ y se detiene, $\dot{x} = 0$, entonces,

$$E = \cancelto{0}{\frac{1}{2}m\dot{x}^2} + \frac{F_0 D}{2\pi}\cos(2\pi) = \frac{F_0 D}{2\pi},$$

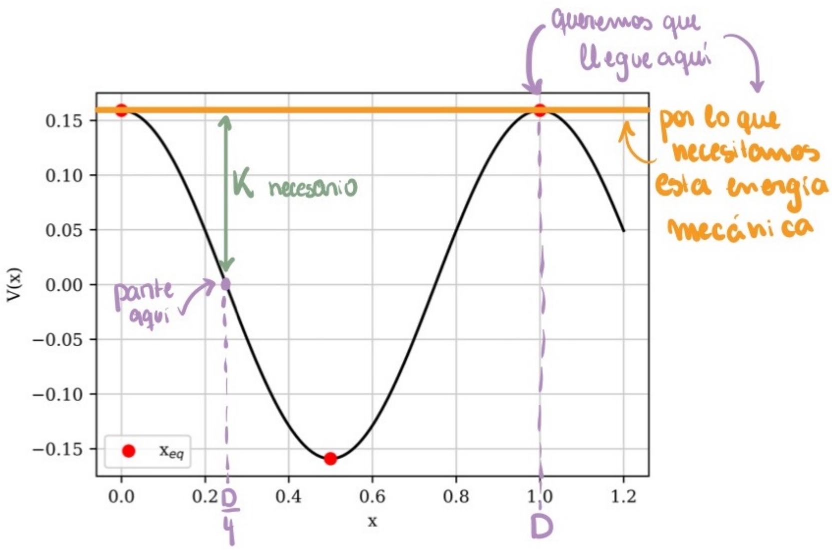
así que calculamos la velocidad inicial considerando la posición inicial $x_0 = D/4$,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x_0}^2 + \frac{F_0 D}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0 D}{2\pi}$$
$$\Rightarrow \dot{x}_0 = \sqrt{\frac{F_0 D}{m\pi}}.$$

Viendo el gráfico de la energía potencial, es claro que sin un impulso la masa no llegaría a la posición $x = D$, ya que se encuentra "más arriba", ver Figura 5, así que para llegar a la energía mecánica justa para el cometido, necesitamos suplir esa diferencia con energía cinética. Como la energía potencial inicial es 0, la energía cinética inicial debe ser igual a la energía potencial final

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_{0,mín}^2 = V(x = D)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}_{0,mín}^2 = \frac{F_0 D}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi D}{D}\right),$$

donde se despeja $\dot{x}_{0,mín}$.



queremos que llegue aquí
por lo que necesitamos esta energía mecánica
K necesario
parte aquí
V(x)
x
x_{eq}
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
D/4
D

Figura 5