

Mecánica FI2001-2
Ejercicio 1: Miércoles 20 de marzo, 2024

Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Javier Huenupi y Eduardo Droguett
Ayudantes: Thiare González y Lukas Philippi

Recuerde que la posición en coordenadas cilíndricas viene dada por $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$. Además, recuerde que los vectores bases $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ pueden ser escritos como

$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}, \quad (1)$$

$$\hat{\phi} = \sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}, \quad (2)$$

donde \hat{i} y \hat{j} son los vectores unitarios cartesianos usuales.

- (a) Obtenga una expresión para $\frac{d}{dt}\hat{\rho}$ en términos de $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$.
- (b) Obtenga una expresión para $\frac{d}{dt}\hat{\phi}$ en términos de $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$.
- (c) Obtenga la expresión para la velocidad $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$ en términos de las bases cilíndricas.

Ejercicio 1

Por geometría y enunciado tenemos:

$$\hat{r} = \cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}$$

Derivamos sabiendo que $\dot{\hat{i}} = \dot{\hat{j}} = \dot{\hat{k}} = \vec{0}$ (no rotan)

$$\triangleright \frac{d}{dt} \hat{r} = -\dot{\phi} \sin\phi \hat{i} + \dot{\phi} \cos\phi \hat{j} = \dot{\phi} (-\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}) = \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$\triangleright \frac{d}{dt} \hat{\phi} = -\dot{\phi} \cos\phi \hat{i} - \dot{\phi} \sin\phi \hat{j} = -\dot{\phi} (\cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j}) = -\dot{\phi} \hat{r}$$

y como la posición en cilíndricas es $\vec{r} = \rho \hat{r} + z \hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} (\rho \hat{r}) + \frac{d}{dt} (z \hat{k})$$

$$= \dot{\rho} \hat{r} + \rho \dot{\hat{r}} + \dot{z} \hat{k}$$

$$= \dot{\rho} \hat{r} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{k}$$