Mecánica FI2001-3
Ejercicio 1: Martes 28 de marzo, 2022

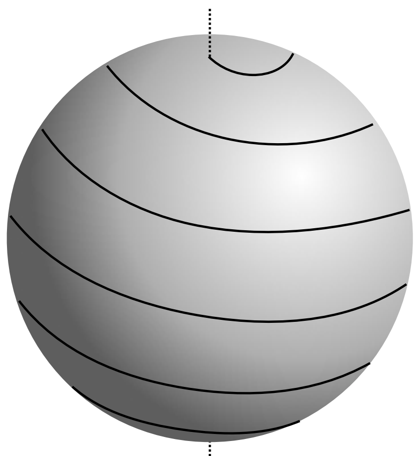
Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Francisco Colipi y Javier Huenupi
Ayudantes: Gabriel Marín y Valentina Suárez

Considere una curva espiral que en coordenadas esféricas satisface las siguientes ecuaciones

$$r = R_0, \qquad \phi = N_0 \theta, \tag{1}$$

donde R_0 y N_0 son constantes conocidas. Una partícula recorre la curva partiendo desde $\theta = 0$, y se mueve de modo que $d\theta/dt = \omega_0$ donde ω_0 es una constante.

(a) 3pts: Obtenga expresiones para la posición y velocidad en términos de la base esférica.
(b) 3pts: Obtenga una expresión para la velocidad angular en términos de la base esférica.



Recuerde:

(1) La velocidad en coordenadas esféricas viene dada por $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$.
(2) La velocidad angular se define como $\vec{\omega} = (\vec{r} \times \vec{v})/||\,\vec{r}\,||^2$.
(3) Note que $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$, $\hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$ y $\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}$.

Solución: Del enunciado se deduce (imponiendo condiciones iniciales) que $\theta(t) = \omega_0 t$. Luego $\phi(t) = N_0\omega_0 t$. Sigue que las primeras y segundas derivadas de θ y ϕ son:

$$\dot{\theta} = \omega_0, \qquad \ddot{\theta} = 0, \qquad \dot{\phi} = N_0\omega_0, \qquad \ddot{\phi} = 0. \tag{2}$$

Entonces, reemplazando estas cantidades en el recordatorio, tenemos:

$$\vec{r} = R_0\hat{r}, \tag{3}$$
$$\vec{v} = N_0\omega_0 R_0 \sin(\omega_0 t)\hat{\phi} + R_0\omega_0\hat{\theta}. \tag{4}$$

Haciendo el producto cruz:

$$\vec{\omega} = \hat{r} \times (N_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)\hat{\phi} + \omega_0\hat{\theta}) \tag{5}$$
$$= -N_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)\hat{\theta} + \omega_0\hat{\phi}. \tag{6}$$