Ejercicio 1 - Cinemática

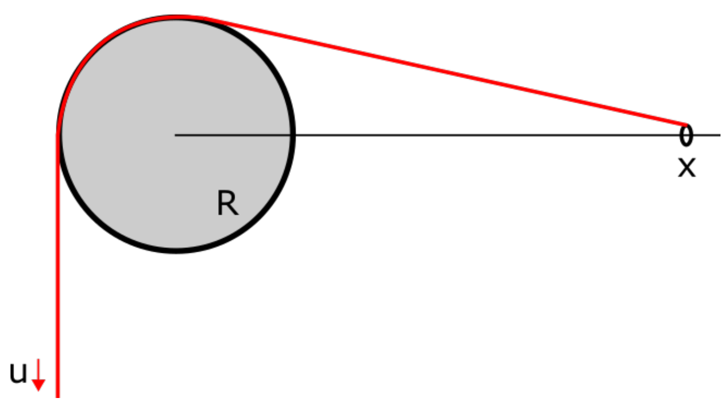
Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudantes: Gerald Barnert

INDICACIÓN DEL EJERCICIO

Este es una evaluación personal, tiene 45 minutos para resolverla y está prohibido todo uso de artefactos electrónicos. Si tiene alguna duda: levante la mano y pregunte en voz alta.

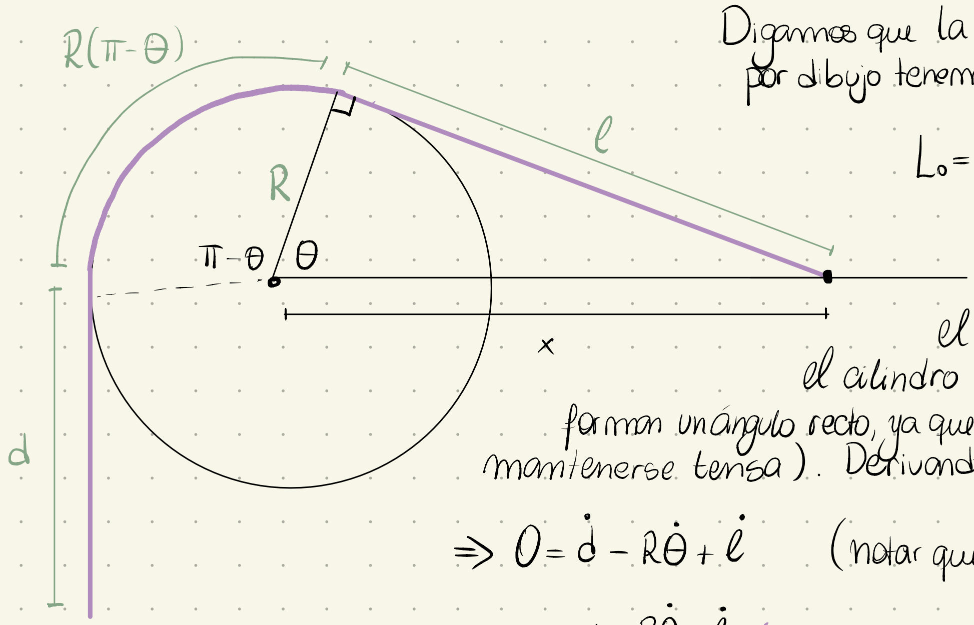
Pregunta

En la figura se ilustra un anillo pasado por el riel rectilíneo, el cual es jalado hacia la izquierda por una cuerda inextensible. La cuerda se apoya sobre un cilindro de radio **R**, mientras que su extremo colgante es desplazado verticalmente hacia abajo con velocidad **u**. Denote x la ubicación del anillo en el riel, medido desde el centro del cilindro. Calcule y grafique la velocidad $\dot{x}$ del anillo en función de la coordenada x.



Ejercicio 1

P1



Digamos que la cuerda tiene un largo L_0 constante, por dibujo tenemos que

$$L_0 = d + R(\pi-\theta) + \ell \quad (1)$$

donde θ es el ángulo medido desde la horizontal hasta el punto en el que la cuerda ya no está tocando el cilindro (en este punto el radio y la cuerda forman un ángulo recto, ya que la cuerda se despega tangente al mantenerse tensa). Derivando (1) con respecto al tiempo

$$\Rightarrow 0 = \dot{d} - R\dot{\theta} + \dot{\ell}$$

(notar que eliminamos L_0, que no conocíamos)

$$= u - R\dot{\theta} + \dot{\ell} \quad (2)$$

donde tenemos que $\underbrace{R^2+\ell^2 = x^2}_{\text{pitágoras}} \Rightarrow \ell = +\sqrt{x^2-R^2} \Rightarrow \dot{\ell} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2-R^2}}$ y también tenemos para el ángulo

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\ell}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2-R^2}}{x}\right)$$

recordar $\frac{d\arcsin(y)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\dot{y}$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \left(\cancel{1} - \left(\frac{\cancel{x^2}-R^2}{x^2}\right)\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2\dot{x}}{\sqrt{x^2-R^2}} - \sqrt{x^2-R^2}\,\dot{x}\right)$$

$$= \frac{x}{R}\dot{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-R^2}} - \frac{\sqrt{x^2-R^2}}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x\dot{x}}{R}\left(\frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + R^2}{\sqrt{x^2-R^2}\,x^2}\right)$$

$$= \frac{\dot{x}R}{\sqrt{x^2-R^2}\,x}$$

reemplazando en (2)

$$0 = u - \frac{\dot{x}R^2}{\sqrt{x^2-R^2}\,x} + \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2-R^2}}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}\left[\frac{-R^2 + x^2}{\sqrt{x^2-R^2}\cdot x}\right] = -u$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(x) = -u\frac{\sqrt{x^2-R^2}\,x}{x^2-R^2} = \frac{-u\cdot x}{\sqrt{x^2-R^2}}$$

Graficando esto