Pauta Ejercicio 1

Cinemática

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.-

Tenemos aceleración constante, por lo que la velocidad la calculamos como:

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = a$$
$$\Rightarrow v(t) = \int_0^t 20dt$$
$$\Rightarrow v(t) = 20t$$

y la posición como la integral de la velocidad,

$$z = \int_0^t 20tdt$$
$$\Rightarrow z(t) = 10t^2$$
$$\Rightarrow z(t_0 = 10) = 1000\,\mathrm{m}.$$

Viendo la figura, por trigonometría tenemos la relación: $\tan\theta(t) = \frac{z(t)}{D}$,

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{z(t)}{D}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+(z(t)/D)^2}\frac{1}{D}\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+(t^2/100)^2}\frac{20t}{D},$$

evaluando en $t_0 = 10\,\mathrm{s}$,

$$\dot{\theta}(t_0) = \frac{1}{10}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

P2.-

Sabemos que el arco de una circunferencia se expresa como $s = R\phi$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} &= R\ddot{\phi} = a_0 \\
\Leftrightarrow \ddot{\phi} &= \frac{a_0}{R} \\
\Rightarrow \dot{\phi}(t) &= \frac{a_0}{R} t.
\end{aligned}
$$

Como el automóvil se mueve en una circunferencia, ocupamos coordenadas polares, donde la aceleración es:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= (\cancelto{0}{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\cancelto{0}{2\dot{\rho}\dot{\phi}} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} \\
&= -R\frac{{a_0}^2}{R^2} t^2 \hat{\rho} + R\frac{a_0}{R}\hat{\phi},
\end{aligned}
$$

tomando la magnitud de este vector,

$$
\begin{aligned}
\|\vec{a}(t_0)\| &= \sqrt{\frac{{a_0}^4}{R^2}{t_0}^4 + {a_0}^2} \\
&= a_0\sqrt{\frac{{a_0}^2}{R^2}{t_0}^4 + 1}\ \mathrm{m\,s^{-2}}.
\end{aligned}
$$

Tenemos que la velocidad en polares es:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \cancelto{0}{\dot{\rho}}\ \hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} \\
\Rightarrow \vec{v} &= a_0 t\hat{\phi} \\
\Rightarrow \|\vec{v}\| &= a_0 t.
\end{aligned}
$$

Para calcular el ángulo entre los vectores velocidad y aceleración, expresamos el producto punto de la velocidad y la aceleración en el tiempo t_0,

$$
\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{a} &= \|\vec{v}\|\|\vec{a}\|\cos\alpha \\
\Leftrightarrow {a_0}^2 t_0 &= {a_0}^2 t_0\sqrt{\frac{{a_0}^2}{R^2}{t_0}^4 + 1}\cos\alpha \\
\Rightarrow \alpha &= \arccos\left(\frac{{a_0}^2}{R^2}{t_0}^4 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Este problema también se podía realizar usando coordenadas naturales:

$$
\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\hat{n},
$$

donde se tiene $\ddot{s} = a_0$ y $\dot{s} = a_0 t$, por lo que, como la velocidad es tangencial a la circunferencia, el ángulo se calcula como:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{(a_0 t)^2}{R}}{a_0}$$
$$\Rightarrow \alpha = \arctan\frac{a_0 t^2}{R}$$

$\boxed{\textbf{P3}.\text{-}}$

La velocidad angular es constante, por lo que el ángulo es $\theta(t) = \omega_0 t$. Del formulario sabemos que la componente angular de la velocidad en coordenadas polares es:

$$\vec{v}_\theta = \rho\dot{\theta}\hat{\theta},$$

reemplazando con las expresiones del enunciado:

$$v_\theta = \rho_0(1 + \omega_0 \mathrm{t})\omega_0 \,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

La componente angular de la aceleración se calcula como:

$$\vec{a}_\theta = (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta},$$

como la velocidad angular es constante, su derivada es cero, por lo que solo nos queda el primer término donde $\dot{\rho} = \rho_0\omega_0$,

$$a_\theta = 2\rho_0{\omega_0}^2.$$