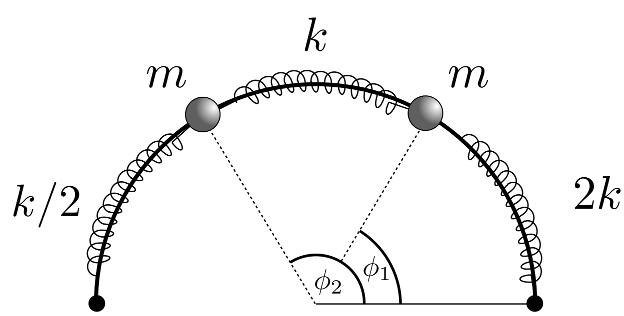
# Mecánica FI2001-3
## Control 3: Miércoles 14 de junio, 2023
**Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Francisco Colipi y Javier Huenupi**
**Ayudantes: Gabriel Marín y Valentina Suárez**

**P1:** La figura muestra un ambiente **sin gravedad** en la cual existen dos cuentas idénticas de masa $m$ confinadas a moverse a lo largo de un alambre semi-circular de radio $R$. La cuentas permanecen unidas entre sí y a los extremos del alambre mediante tres resortes, todos de largo natural $R\pi/3$. Los resortes tienen constantes elásticas $2k$, $k$ y $k/2$, en el orden mostrado en la figura.

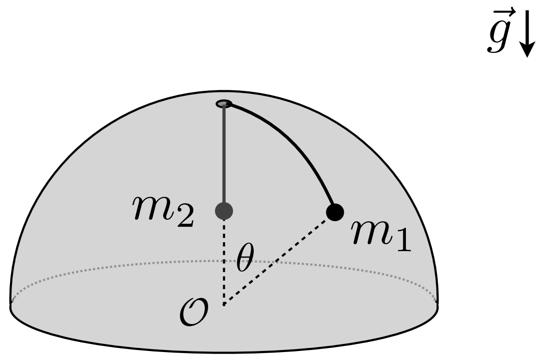



**(a) 3.0 pts.** Obtenga los valores $\phi_1^{\rm eq}$ y $\phi_2^{\rm eq}$ para los cuales el sistema se mantiene en equilibrio estable. Defina $\delta\phi_1 = \phi - \phi_{\rm eq}$ y $\delta\phi_2 = \phi_2 - \phi_2^{\rm eq}$ y derive las ecuaciones de movimiento lineales y acopladas para las cantidades (pequeñas) $\delta\phi_1$ y $\delta\phi_2$.

**(b) 1.5 pts.** Obtenga las frecuencias de oscilación de los modos normales.

**(c) 1.5 pts.** Identifique los modos normales y bosqueje los movimientos asociados a cada modo.

**P2:** Un casquete semi-esférico de radio $R$ tiene un orificio pequeño en su parte superior. Por él, pasa una cuerda ideal inextensible de largo $\pi R/2$ con dos masas $m_1$ y $m_2$ en sus extremos. La masa $m_2$ cuelga verticalmente desde el orificio, mientras que $m_1$ permanece en contacto con la superficie del casquete (ver figura). Inicialmente, la masa sobre el casquete es tal que $\theta = \pi/3$, $\dot{\theta} = 0$, $\phi = 0$, $\dot{\phi} = \omega_0$.




**(a) 1.5 pts.** Obtenga una expresión para el Lagrangiano del sistema en función de las coordenadas esféricas $\theta$ y $\phi$ que denotan la posición de $m_1$ sobre el casquete.

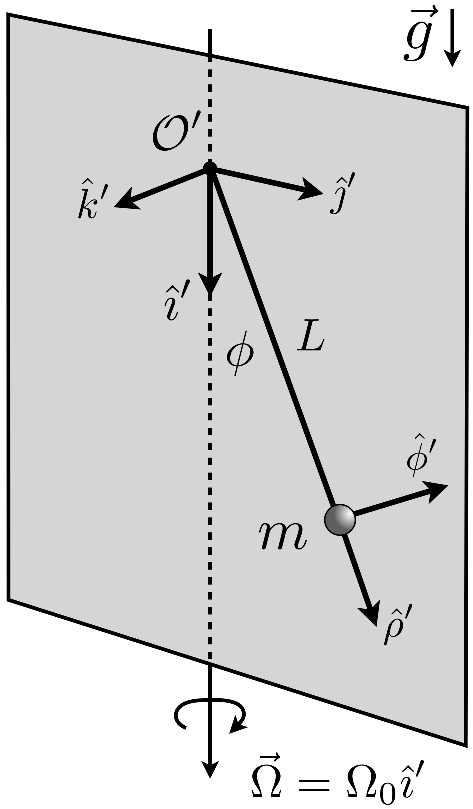
**(b) 1.5 pts.** Derive las ecuaciones de Eüler-Lagrange asociadas a $\theta$ y $\phi$.

**(c) 1.5 pts.** A partir de la ecuación de Eüler-Lagrange asociada a $\phi$, determine una expresión para $\dot{\phi}$ en función de $\theta$ tomando en cuenta las condiciones iniciales del sistema.

**(e) 1.5 pts.** Use el resultado de la parte (c) para eliminar $\dot{\phi}$ de la ecuación de Eüler-Lagrange asociada a $\theta$. A partir de este resultado, determine el valor que debe tener $\omega_0$ para que la trayectoria alrededor del casquete sea circular uniforme (con $\theta = \pi/3$).

*Indicación 1*: $\vec{r} = r\hat{r}$, $\qquad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$.
*Indicación 2*: $\cos(\pi/3) = 1/2$.

**P3:** Una pared gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega_0 \hat{\imath}'$, tal como muestra la figura. Un péndulo de largo $L$ y masa $m$ es sostenido por la pared desde el origen $\mathcal{O}'$, atravesado por el eje de rotación.




**(a) 2.5pts.** Determine expresiones para cada fuerza no-inercial que participa en la segunda ley de Newton válida en el sistema de referencia solidario a la pared.

**(b) 2.5pts.** Encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo $\phi$ del péndulo con respecto al eje vertical. ¿Para qué valores de $\Omega_0$ el ángulo $\phi = 0$ es un punto de equilibrio estable?

**(c) 1pt.** ¿Es posible lograr que el péndulo oscile (en torno a algún ángulo) sin que se despegue de la pared? Justifique su respuesta.

*Indicación 1*: $\quad m\vec{a}\,' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}\,') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}\,' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}\,'.$

*Indicación 2*: $\quad \vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}, \quad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi}$

**Solución P1:** **(a)** Se tiene $\phi_1^{\rm eq} = \pi/3$ y $\phi_2^{\rm eq} = 2\pi/3$. El Lagrangiano del sistema es $L = \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}_2^2 - kR^2(\phi_1 - \pi/3)^2 - \frac{k}{2}R^2(\phi_2 - \phi_1 - \pi/3)^2 - kR^2(\pi R - \phi_2)^2$. Luego: $m\ddot{\phi}_1 + 2k(\phi_1 - \pi/3) - k(\phi_2 - \phi_1 - \pi/3) = 0$ y $m\ddot{\phi}_2 - \frac{k}{2}(2\pi/3 - \phi_2) + k(\phi_2 - \phi_1 - \pi/3) = 0$. Definiendo $\delta\phi_1 = \phi_1 - \phi_1^{\rm eq}$ y $\delta\phi_2 = \phi_2 - \phi_2^{\rm eq}$ las ecuaciones son $\delta\ddot{\phi}_1 + \frac{3k}{m}\delta\phi_1 - \frac{k}{m}\delta\phi_2 = 0$ y $\delta\ddot{\phi}_2 + \frac{3k}{2m}\delta\phi_2 - \frac{k}{m}\delta\phi_1 = 0$. **(b)** $\Omega^2 = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$. Los autovalores son $\lambda = \frac{k}{m}(9/4 \pm 5/4)$. Luego $\omega_1 = \sqrt{\frac{7k}{2m}}$ y $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. **(c)** $\vec{e}_1 = (-2, 1)/\sqrt{5}$ y $\vec{e}_2 = (1, 2)/\sqrt{5}$. A partir de estos los movimientos pueden ser dibujados.

**Solución P2:** **(a)** Se tiene que $z_2 = R\theta$. Además $\vec{v}_1 = R\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + R\dot{\theta}\hat{\theta}$. Luego $L = \frac{m_1}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) + \frac{m_2}{2}R^2\dot{\theta}^2 - m_2 gR\theta - m_1 gR(1 - \cos\theta)$. **(b)** Las ecuaciones de E-L son: $(m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta} - m_1R^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + m_2 gR + m_1 gR\sin\theta = 0$ y $\frac{d}{dt}(\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0$. **(c)** $\sin^2\theta\dot{\phi}$ =constante. Usando las condiciones iniciales: $\dot{\phi} = \frac{3\omega_0}{4\sin^2\theta}$. **(d)** $(m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta} - m_1R^2\frac{9\omega_0^2}{16\sin^3\theta}\cos\theta + m_2 gR + m_1 gR\sin\theta = 0$. Imponiendo $\ddot{\theta} = 0$ obtenemos $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{R}(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{m_2}{m_1})}$.

**Solución P3:** **(a)** La posición y velocidad de $m$ en $S'$ son: $\vec{r}\,' = L\hat{\rho}\,'$ y $\vec{v}\,' = L\dot{\phi}\hat{\phi}\,'$. Luego $\vec{F}_{\rm cent} = -m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,') = -m\Omega_0^2 L\hat{\imath}'\times(\hat{\imath}'\times\hat{\rho}) = -m\Omega_0^2 L\sin\phi\hat{\imath}'\times\hat{k}' = m\Omega_0^2 L\sin\phi\hat{\jmath}'$ y $\vec{F}_{\rm Cor} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}\,' = -2m\Omega_0 L\dot{\phi}\hat{\imath}'\times\hat{\phi}' = -2m\Omega_0 L\dot{\phi}\hat{k}'\cos\phi$. **(b)** Se tiene $\vec{a}\,' = L\ddot{\phi}\hat{\phi} - L\dot{\phi}^2\hat{\rho}$. Luego, la segunda Ley de Newton es $mL(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) = -T\hat{\rho} + mg\hat{\imath}' + N\hat{k}' + m\Omega_0^2 L\sin\phi\hat{\jmath}' - 2m\Omega_0 L\dot{\phi}\hat{k}'\cos\phi$. En base cilíndrica: $mL(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) = -T\hat{\rho} + mg(\hat{\rho}'\cos\phi - \hat{\phi}'\sin\phi) + N\hat{k}' + m\Omega_0^2 L\sin\phi(\hat{\rho}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi) - 2m\Omega_0 L\dot{\phi}\hat{k}'\cos\phi$. Luego $\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\sin\phi - \Omega_0^2\sin\phi\cos\phi = 0$. Para pequeños ángulos se tiene $\ddot{\phi} + (\frac{g}{L} - \Omega_0^2)\phi = 0$. Luego, se requiere que $\Omega_0^2 < \frac{g}{L}$. **(c)** $N = 2m\Omega_0 L\dot{\phi}\cos\phi$. Vemos que $N < 0$ cuando $\dot{\phi} < 0$. Dado que una oscilación requiere que en algún momento $\dot{\phi} < 0$, inevitablemente el péndulo se despegará de la pared.