

Problema 1

Un cohete asciende verticalmente. Justo al alcanzar la altura máxima de vuelo (H_{\max}) el cohete explota en tres fragmentos de igual masa. Uno de ellos sale disparado verticalmente hacia abajo, demorando un tiempo t_1 en llegar al suelo. Los otros dos fragmentos demoran un tiempo t_2 en hacerlo.

Encuentre la altura H_{\max} en función de los tiempos t_1 y t_2 .

Desprecie los efectos inerciales de la rotación de la Tierra y el roce viscoso del aire con los fragmentos. Considere que hasta la altura H_{\max} la aceleración de gravedad es constante e igual a la observada a nivel del mar.

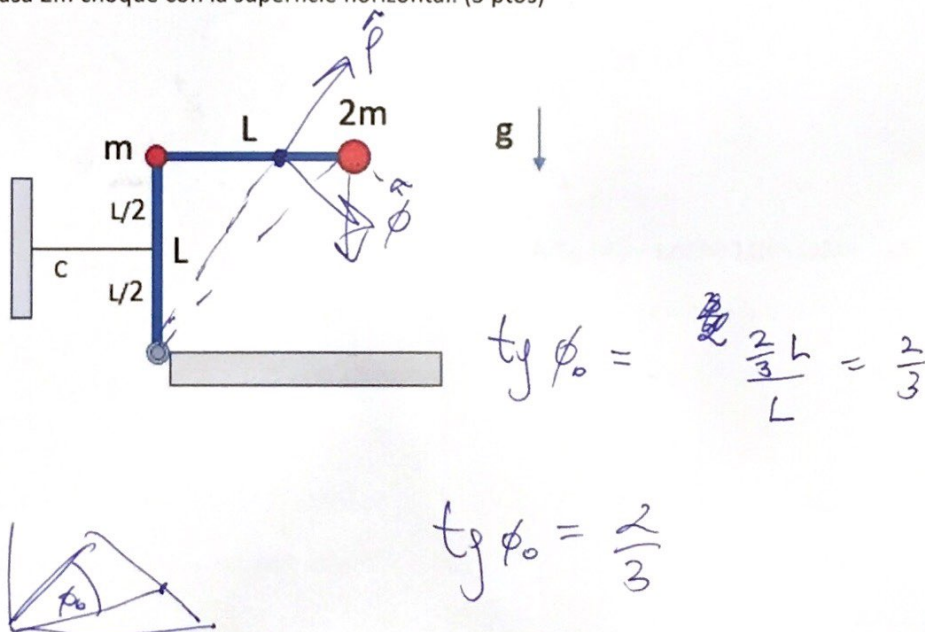
Problema 2

Considere una estructura formada por dos partículas de masas m y $2m$ conectadas entre sí por una barra de largo L . La partícula de masa m se encuentra además fija a otra barra de largo L , cuyo otro extremo puede rotar sin roce alrededor de un eje horizontal, instalado en una superficie horizontal, como se indica en la figura adjunta. Considere que las masas de las barras son despreciables en comparación con las masas de las partículas. El sistema se encuentra inicialmente en reposo, sujeto por una cuerda horizontal (C) atada en el punto medio de la barra que rota alrededor del eje.

- a) calcule la tensión de la cuerda y la magnitud de la fuerza que el eje de rotación ejerce sobre la estructura. (1 pto)

En algún momento la cuerda se corta y la estructura empieza a rotar alrededor del eje

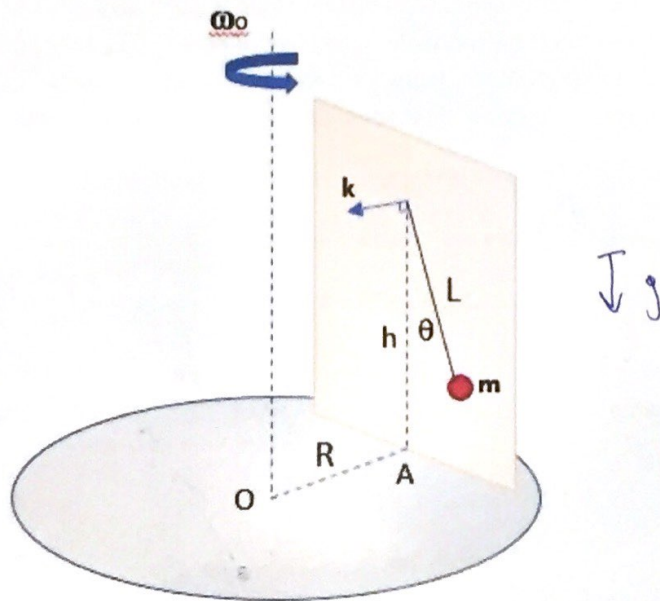
- b) Calcule la velocidad de impacto de la partícula $2m$ sobre la superficie horizontal (2 pts)
- c) calcule la magnitud de la fuerza que el eje ejerce sobre la estructura en el momento justo después que se corta la cuerda y justo antes que masa $2m$ choque con la superficie horizontal. (3 pts)



Problema 3

Una pared vertical descansa sobre un disco que gira alrededor de su eje de simetría con velocidad angular ω_0 constante. La pared es perpendicular a la recta OA y se encuentra a una distancia R del eje de simetría del disco. En el punto medio de la pared, a una altura h del disco, hay un pivote que sostiene un péndulo de largo L y masa m (ver figura).

- Determine expresiones para las fuerzas reales y ficticias que correspondan en este caso al plantear la ecuación de movimiento de la masa m con respecto a un sistema de referencia polar, solidario a la pared, siendo \mathbf{k} un vector unitario perpendicular a ésta. (1.5 pts)
- Encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo θ . (1.5 pts)
- Determine las posiciones angulares (θ) de equilibrio de la masa m en su movimiento relativo a la pared. ¿Cuál es la velocidad angular ω_0 máxima para que $\theta = 0$ sea un punto de equilibrio estable? (1.5 pts)
- Si la plataforma rota con una velocidad angular ω_1 , tal que $\omega_1^2 = 2 \omega_{0 \text{ max}}^2$ determine cuál es el ángulo de equilibrio estable y el periodo de pequeñas oscilaciones en torno a él. (1.5 pts)



INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

Ecuación de movimiento en un sistema de referencia no inercial:

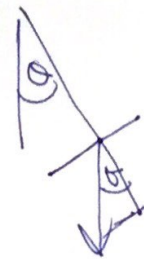
$$m \mathbf{a}' = \mathbf{F} + (-m \mathbf{a}_o) + 2 m \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}_o + m (\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega}_o + m \mathbf{r}' \times d\boldsymbol{\omega}_o/dt$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen } \beta$$

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$$

$$\text{cos}(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$$



Problema 1

Designamos \mathbf{v} la velocidad que lleva la partícula que sale disparada hacia abajo, y \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , la de cada una de las otras dos. Entonces es cierto que

$$\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{v}_1 = v_{1x}\hat{\mathbf{x}} + v_{1y}\hat{\mathbf{y}}, \quad (1b)$$

$$\mathbf{v}_2 = v_{2x}\hat{\mathbf{x}} + v_{2y}\hat{\mathbf{y}}. \quad (1c)$$

Dado que las 3 masas son iguales, y que la velocidad del sistema en el instante previo a la explosión es nula, se cumple por conservación local de momento lineal que

$$v + v_{1y} + v_{2y} = 0, \quad (2a)$$

$$v_{1x} + v_{2x} = 0. \quad (2b)$$

Después de la explosión la única fuerza externa que sienten todas las partículas es su peso, por lo tanto se cumple

$$y(t) = H + vt - \frac{gt^2}{2}, \quad (3a)$$

$$y_1(t) = H + v_{1y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad (3b)$$

$$y_2(t) = H + v_{2y}t - \frac{gt^2}{2}. \quad (3c)$$

Se sabe que la partícula que sale verticalmente hacia abajo demora un tiempo t_1 en llegar al suelo, es decir, $y(t_1) = 0$, mientras que las partículas (1) y (2) tardan un tiempo t_2 en llegar al suelo, es decir, $y_1(t_2) = y_2(t_2) = 0$. En consecuencia,

$$0 = H + vt_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \quad (4a)$$

$$0 = H + v_{1y}t_2 - \frac{gt_2^2}{2}, \quad (4b)$$

$$0 = H + v_{2y}t_2 - \frac{gt_2^2}{2}. \quad (4c)$$

Al restar las Ecs. (4b) y (4c) se obtiene que $v_{1y} = v_{2y}$. Para simplificar la notación decimos $v_{1y} = v'$, y entonces la Ec. (2a) se transforma

en $v + 2v' = 0$, de tal forma que las Ecs. (4) se reescriben como

$$0 = H - 2v't_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \quad (5a)$$

$$0 = H + v't_2 - \frac{gt_2^2}{2}, \quad (5b)$$

De las Ecs. (5) se obtiene directamente el resultado pedido, dado por

$$H = \frac{g}{2} \left(\frac{2t_2 + t_1}{2t_1 + t_2} \right) t_1 t_2. \quad (6)$$

Problema 2

Utilizamos un sistema de referencia con origen en el pivote que denotaremos como \mathcal{O} . Aplicamos la ecuación de torque para la estructura sobre el punto \mathcal{O} , considerando que la estructura permanece en reposo, y entonces se obtiene $-2mgL + T\frac{L}{2} = 0$, desde donde se concluye directamente que

$$T = 4mg. \quad (7)$$

Por otra parte, hacemos un análisis de fuerzas para el sistema que contempla ambas barras y ambas masas. En ese caso, dado que la estructura permanece en reposo, se cumple

$$-T + F_x = 0 \quad (8a)$$

$$-3mg + F_y = 0 \quad (8b)$$

De aquí se obtiene que $F_x = 4mg$, y que $F_y = 3mg$. Considerando que $\mathbf{F} = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}}$ se obtiene que el módulo de la fuerza que ejerce el pivote sobre la estructura en el eje de rotación está dado por

$$F = 5mg. \quad (9)$$

Por otra parte, se observa que el momento de inercia de la estructura con respecto al punto \mathcal{O} está dado por $I_{\mathcal{O}} = 5mL^2$, y definiendo ϕ como el ángulo que forma con la vertical la barra conectada al pivote (Ver. Fig. 1), se obtiene que

la ecuación de torque está dada por $mgL \sin \phi + 2mgL(\sin \phi + \cos \phi) = 5mL^2\ddot{\phi}$, de manera que la ecuación de movimiento cumple

$$\ddot{\phi}(\phi) = \frac{g}{5L}(3 \sin \phi + 2 \cos \phi). \quad (10)$$

Integrando la ecuación de movimiento se obtiene una expresión para la rapidez angular en función del ángulo, dada por

$$\dot{\phi}^2(\phi) = \frac{2g}{5L}(3 - 3 \cos \phi + 2 \sin \phi). \quad (11)$$

Notemos que la velocidad de la masa $2m$ es tangencial de radio $\sqrt{2}L$ y rapidez angular $\dot{\phi}$. Además, el punto de impacto ocurre en $\phi = \frac{\pi}{4}$, y entonces en ese punto es cierto que

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \frac{2(6 - \sqrt{2})}{5}gL. \quad (12)$$

Ahora analizamos la ecuación de movimiento para el centro de masas. De la Fig. 1 se observa que $\rho_{cm} = \sqrt{13}L/3$, y que $\tan \alpha = \frac{2}{3}$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento del centro de masas por componentes está dada por

$$-\sqrt{13}L\dot{\phi}^2 = -3g \sin(\phi + \alpha) + \frac{F_\rho}{m} \quad (13a)$$

$$\sqrt{13}L\ddot{\phi} = 3g \cos(\phi + \alpha) + \frac{F_\phi}{m}. \quad (13b)$$

Sabemos que la fuerza que ejerce el eje es de la forma $\mathbf{F} = F_\rho \hat{\rho} + F_\phi \hat{\phi}$, por lo tanto su módulo está dado por la expresión $\|\mathbf{F}\| = F_\rho^2 + F_\phi^2$. Si consideramos la información contenida en las Ecs. (10), (11) y (13), se tiene que para justo después de que se corte la cuerda ($\phi = 0$) y para cuando justo antes que la estructura impacte con el suelo, el módulo de la fuerza que el eje ejerce sobre la estructura está dado respectivamente por

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{\frac{97}{13}}mg, \quad (14a)$$

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{1073}{25} - 246\sqrt{2}}mg \quad (14b)$$

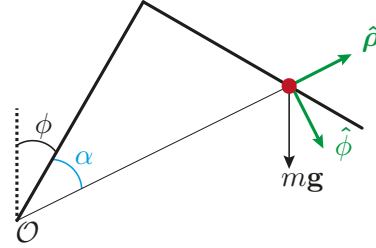


Figure 1: Problema 2

Problema 3

Usamos un sistema de referencia no inercial cuyo origen se encuentra en el pivote del péndulo, cuyo eje $\hat{\mathbf{y}}'$ sea siempre perpendicular al disco, y cuyo eje $\hat{\mathbf{x}}'$ esté siempre contenido en el plano de oscilación del péndulo. De esta manera se cumple que $\boldsymbol{\Omega} = \omega_0 \hat{\mathbf{y}}'$ y $\mathbf{A} = -\omega_0^2 R \hat{\mathbf{k}}'$. Notando que $\hat{\mathbf{y}}' = -\cos \theta \hat{\rho}' + \sin \theta \hat{\theta}'$, se cumple que

$$\boldsymbol{\Omega} = -\omega_0 \cos \theta \hat{\rho}' + \omega_0 \sin \theta \hat{\theta}', \quad (15a)$$

$$\mathbf{A} = -\omega_0^2 R \hat{\mathbf{k}}'. \quad (15b)$$

Por otra parte, queremos describir el movimiento del péndulo con coordenadas polares, definidas a partir del SRNI antes mencionado, entonces se cumple

$$\mathbf{r}' = L \hat{\rho}', \quad (16a)$$

$$\mathbf{v}' = L \dot{\theta} \hat{\theta}', \quad (16b)$$

$$\mathbf{a}' = -mL \dot{\theta}^2 \hat{\rho}' + mL \ddot{\theta} \hat{\theta}'. \quad (16c)$$

Con las ecuaciones (15) y (16) somos capaces de calcular las 4 fuerzas ficticias por definición, y entonces

$$\mathbf{F}_{\text{tras}} = m\omega_0^2 R \hat{\mathbf{k}}', \quad (17a)$$

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} = 2mL\omega_0 \dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{k}}', \quad (17b)$$

$$\mathbf{F}_{\text{cent}} = m\omega_0^2 L \sin \theta (\sin \theta \hat{\rho}' + \cos \theta \hat{\theta}') \quad (17c)$$

$$\mathbf{F}_{\text{az}} = 0. \quad (17d)$$

Las fuerzas externas reales que actúan sobre el sistema son el peso $m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{y}}'$ y la tensión $\mathbf{T} = -T\hat{\boldsymbol{\rho}}$, entonces se cumple

$$\mathbf{T} = T\hat{\boldsymbol{\rho}}, \quad (18a)$$

$$m\mathbf{g} = mg(\cos\theta\hat{\boldsymbol{\rho}}' - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (18b)$$

La ecuación de movimiento del ángulo θ es la correspondiente a la dirección $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, para la cual se tiene $m\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega_0^2 L \sin\theta \cos\theta$, que de manera simplificada es equivalente a

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} - \omega_0^2 \cos\theta\right) \sin\theta = 0. \quad (19)$$

Los puntos de equilibrio se obtienen cuando $\ddot{\theta} = 0$. De la Ec. (19) se observa que los puntos de equilibrio θ_{eq} satisfacen alguna de las ecuaciones

$$\sin\theta_{eq} = 0, \quad (20a)$$

$$\cos\theta_{eq} = \frac{g}{L\omega_0^2}. \quad (20b)$$

De aquí notamos que tenemos 3 puntos de equilibrio cualitativamente distintos, estos corresponden a $\theta_{eq} \in \left\{0, \pi, \cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega_0^2 L}\right)\right\}$. Para ver la estabilidad del primer punto de equilibrio ($\theta_{eq} = 0$) debemos linealizar la ecuación (19) en torno a este punto, desde donde se obtiene

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} - \omega_0^2\right) \theta = 0. \quad (21)$$

De la Ec. (21) se observa claramente que si $\omega_0^2 > \frac{g}{L}$ el punto de equilibrio $\theta_{eq} = 0$ es inestable. Por lo tanto la frecuencia máxima es $\omega_{0\max}^2 = \frac{g}{L}$. Por otra parte, notamos que el punto de equilibrio $\theta_{eq} = \pi$ es trivialmente inestable, por lo que linealizamos la Ec. (19) en torno al tercer punto de equilibrio $\theta_{eq} = \cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega_0^2 L}\right)$, y entonces la Ec. (19) linealizada en torno a este punto de equilibrio es

$$\ddot{\theta} + \left(\omega_0^2 - \frac{g^2}{\omega_0^2 L^2}\right) \theta = 0. \quad (22)$$

Consideramos $\omega_0^2 = \frac{2g}{L}$, y entonces la Ec. (22) se transforma en

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0, \quad (23)$$

desde donde concluimos que la frecuencia de pequeñas oscilaciones está dada por $\omega_{p.o.}^2 = \frac{3g}{2L}$, y en consecuencia el período está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}. \quad (24)$$