FI-2001 Mecánica - Sección-2
Prof. Gonzalo A. Palma.
Auxiliares: Javier Huenupi y Eduardo Droguett
Ayudantes: Thiare González, Lukas Philippi y Claudia San Martín
FCFM, Universidad de Chile

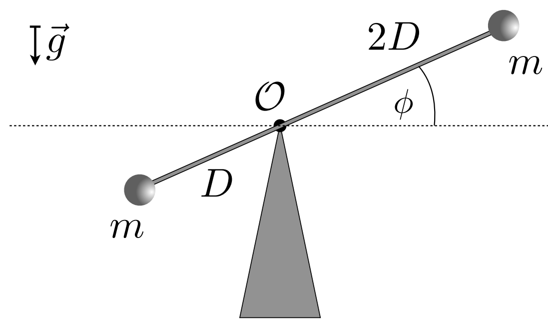
Control 2

Miércoles 15 de mayo, 2024
Tiempo: 3horas

P1: Una varilla rígida, sin masa, de largo $3D$, tiene dos masas idénticas puntuales en sus extremos, y puede girar en torno a una rótula montada sobre un soporte (punto $\mathcal{O}$ de la figura). La ubicación de la rótula es tal que una de las masas se mantiene a una distancia D, mientras que la otra lo está a una distancia $2D$ de ella. El ángulo entre la parte más larga de la varilla y la horizontal es ϕ. La varilla se suelta desde el reposo cuando $\phi = \pi/4$.

(a) Determine el momento angular total $\vec{L}_{\mathcal{O}}$ y el torque total $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}$ del sistema con respecto a $\mathcal{O}$.
(b) Encuentre la ecuación de movimiento satisfecha por ϕ. Determine el valor de $\dot{\phi}$ cuando $\phi = 0$.
(c) Determine la aceleración del centro de masas del sistema con respecto a $\mathcal{O}$. Use este resultado para encontrar la fuerza que ejerce $\mathcal{O}$ sobre la varilla cuando $\phi = 0$.

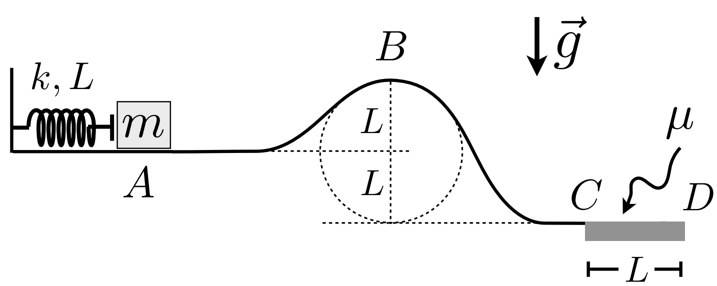
Indicación: Recuerde que para coordenadas polares: $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$, $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}$ y $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi}$.



P2: Un nuevo juego en Fantasilandia consiste en un carro de masa m que es liberado desde el reposo en el punto A mientras comprime una distancia δ a un resorte ideal de constante elástica k y largo natural L. El carro debe seguir la trayectoria A-B-C-D de la figura, donde el único roce a considerar es uno de tipo cinético con coeficiente μ en el tramo horizontal C-D de largo L. Asuma que $m < Lk/3g$ y $\mu > 1$, y determine:

(a) El valor mínimo $\delta_{\min}$ para que el carro sea capaz de llegar al punto más alto B ubicado a una altura L sobre el nivel de A.
(b) El valor máximo $\delta_{\max}$ para que el carro no se separe en el punto B, donde la trayectoria es localmente una circunferencia de radio L.
(c) Valor de δ para que el carro llegue en reposo al punto D ubicado a una distancia L por debajo del nivel de A.

Ayuda: El carro se separa del resorte cuando éste llega a su largo natural. Suponga que si el carro no se separa de B, éste no se separa nunca de la superficie. Además, recuerde que $\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n}$ donde ρ_c es el radio de curvatura.

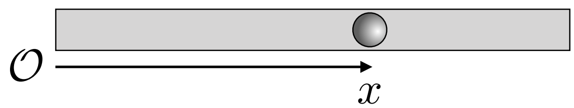


P3: Una partícula de masa m se desplaza sin roce por el interior de un tubo colocado en forma horizontal, bajo la acción de una fuerza conservativa cuyo potencial asociado está dado por la expresión siguiente:

$$U(x) = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x}, \tag{1}$$

Donde A y B son constantes positivas.

(a) Determine las unidades de A y B.
(b) Determine la aceleración de la partícula cuando ésta está en una posición arbitraria x.
(c) Si existe algún punto de equilibrio estable x_0, determine el periodo de pequeñas oscilaciones que experimenta la partícula cuando se libera desde el reposo en un punto muy cercano a x_0.
(d) Si la partícula se libera desde la posición $x = x_0/2$ en reposo, determine su rapidez cuando pasa por la posición x_0.



P1: (a) $\vec{L}_{\mathcal{O}} = m(2D\hat{\rho}) \times (2D\dot{\phi}\hat{\phi}) + m(-D\hat{\rho}) \times (-D\dot{\phi}\hat{\phi}) = 5mD^2\dot{\phi}\hat{k}$. $\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = (2D\hat{\rho}) \times mg(-\cos\phi\hat{\phi} - \sin\phi\hat{\rho}) + (-D\hat{\rho}) \times mg(-\cos\phi\hat{\phi} - \sin\phi\hat{\rho}) = -mgD\cos\phi\hat{k}$. De $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$ se encuentra: $\ddot{\phi} + \frac{g}{5D}\cos\phi = 0$. Integrando e imponiendo condiciones iniciales se encuentra $\dot{\phi}^2 = \frac{2g}{5D}(1/\sqrt{2} - \sin\phi)$. Luego, para $\phi = 0$ se satisface $\dot{\phi} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{5D}}$. **(c)** El centro de masas está en $\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{2m}(m2D\hat{\rho} - mD\hat{\rho}) = \frac{1}{2}D\hat{\rho}$. La aceleración es $\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{2}D(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho})$. La fuerza total sobre el sistema es: $\vec{F}_{\text{tot}} = 2mg(-\cos\phi\hat{\phi} - \sin\phi\hat{\rho}) + \vec{F}_{\mathcal{O}}$. Usando $2m\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{tot}}$ vemos que $\vec{F}_{\mathcal{O}} = mD(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) + 2mg(\cos\phi\hat{\phi} + \sin\phi\hat{\rho})$. Reemplazando las cantidades obtenidas en las partes anteriores para $\phi = 0$ finalmente vemos que $\vec{F}_{\mathcal{O}} = mg(\frac{9}{5}\hat{\jmath} - \frac{\sqrt{2}}{5}\hat{\imath})$ donde $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ apuntan hacia la derecha y hacia arriba respectivamente.

P2: (a) Inicialmente el carro está en reposo por lo que $E_A = \frac{k}{2}\delta^2$ (asumiendo $U_g = 0$ al nivel de A). Al llegar a la altura B en reposo, esa energía se transforma en energía potencial $E_B = mgL$. Igualando vemos que $\delta_{\text{min}} = \sqrt{2mgL/k}$. **(b)** La segunda ley en el punto B es $m\vec{a} = (-N + mg)\hat{n}$ donde $\hat{n}$ apunta hacia el centro del circunferencia (hacia abajo). Usando $N = 0$ junto con la indicación vemos que $\dot{v}_B\hat{t} + \frac{v_B^2}{L}\hat{n} = g\hat{n}$. Sigue $v_B = \sqrt{gL}$. Luego $E_B = \frac{m}{2}v_B^2 + mgL = 3mgL/2$, de donde $\delta_{\text{max}} = \sqrt{3mgL/k}$. **(c)** El carro llega al punto C con energía $E_C = E_A = \frac{k}{2}\delta^2$. En el punto D la energía es $E_D = \frac{m}{2}v_D^2 - mgL = -mgL$ donde usamos $v_D = 0$. Debido al roce se tiene $W_{\text{NC}} = E_D - E_C$, donde $W_{\text{NC}} = -\int_0^L dx\mu N$, con $N = mg$ (la fuerza normal). Luego: $E_D = \frac{k}{2}\delta^2 - L\mu mg$. Igualando ambas expresiones para E_D se encuentra: $\delta = \sqrt{2(\mu - 1)mgL/k}$.

P3: (a) La unidad de energía cinética es $[K] = \text{Kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$. El potencial debe tener las mismas unidades. Luego $[A]\frac{1}{\text{m}^2} = \text{Kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ y $[B]\frac{1}{\text{m}} = \text{Kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$. Sigue que $[A] = \text{Kg}\frac{\text{m}^4}{\text{s}^2}$ y $[B] = \text{Kg}\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$. **(b)** Se tiene $m\ddot{x} = -U'(x)$. Sigue que $\ddot{x} = \frac{1}{m}(2A/x^3 - B/x^2)$. **(c)** El punto de equilibrio satisface $\ddot{x} = 0$. Vemos que $x_0 = \frac{2A}{B}$. Escribiendo $x = \frac{2A}{B} + \delta x$ e insertando en la ecuación de la parte (b) vemos que $\ddot{\delta x} = \frac{1}{m}\left(\frac{2A}{(2A/B+\delta x)^3} - \frac{B}{(2A/B+\delta x)^2}\right)$. Expandiendo el lado derecho en Taylor hasta primer orden en δx, obtenemos: $\ddot{\delta x} + \frac{B^4}{8mA^3}\delta x = 0$. Luego, la frecuencia es $\omega_0 = \frac{B^2}{2\sqrt{2mA^3}}$. **(d)** Por conservación de energía $\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = U(x_0/2)$. Luego $\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}[U(x_0/2) - U(x)]}$. Cuando $x = x_0$ tenemos $\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}[U(x_0/2) - U(x_0)]} = \sqrt{\frac{2}{m}[\frac{A}{(A/B)^2} - \frac{B}{A/B} - \frac{A}{(2A/B)^2} + \frac{B}{2A/B})]} = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{B^2}{2A}}$.