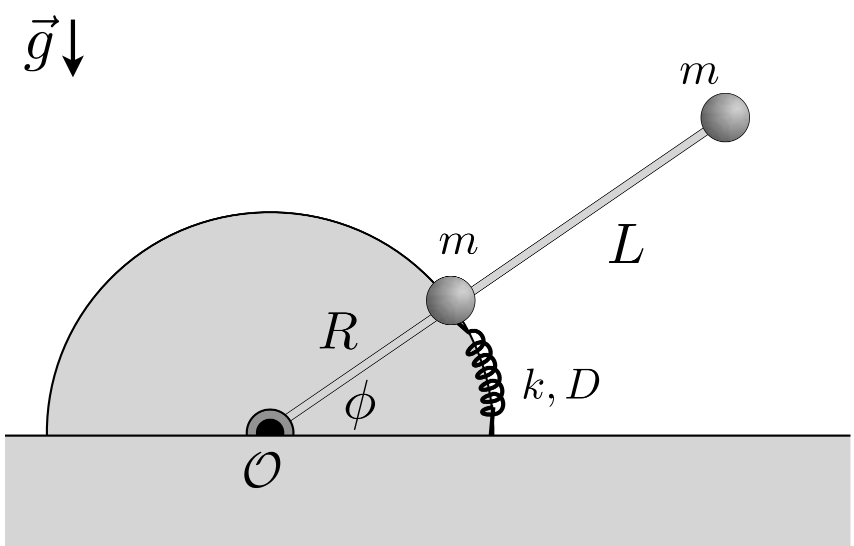
Mecánica FI2001-3
Control 2: Miércoles 17 de mayo, 2023
Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Francisco Colipi y Javier Huenupi
Ayudantes: Gabriel Marín y Valentina Suárez

P1: Considere dos masas m sostenidas por una varilla rígida (sin masa) de largo L que puede girar en torno a un eje (punto $\mathcal{O}$) ubicado sobre el suelo (ver figura). Las masas están a distancias R y L del origen $\mathcal{O}$, respectivamente. La primera masa permanece conectada al suelo mediante un resorte de constante elástica k y largo natural $D < \pi/2$, confinado al borde de un disco de radio R cuyo centro coincide con el eje de giro de la varilla.

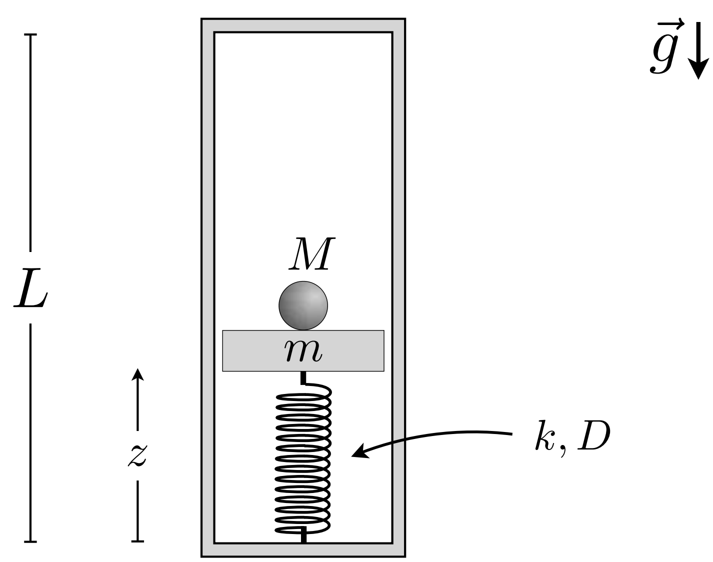
(a) Calcule el momento angular total del sistema con respecto al eje de rotación.
(b) Calcule el torque total del sistema con respecto al eje de rotación.
(c) Obtenga la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ.
(d) Determine la fuerza que el eje $\mathcal{O}$ ejerce sobre la varilla en el instante inicial en que $\phi = \pi/2$ y $\dot{\phi} = 0$.



Indicación: Recuerde que para un sistema de N partículas se tiene $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{ext}}$ donde $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ corresponde a la fuerza externa que actúa sobre la i-ésima partícula.

P2: Considere un tubo de largo L, colocado en posición vertical por cuyo interior puede deslizar sin roce un émbolo de masa m. Este se encuentra unido a un resorte de largo natural D y constante elástica k cuyo otro extremo está fijo en la base del tubo. Sobre el émbolo descansa una partícula de masa M. El largo del tubo es el doble del largo natural del resorte ($L = 2D$). Suponiendo que el émbolo se libera luego de comprimir el resorte una distancia Δ con respecto al largo natural del resorte:

(a) Determine una expresión para la magnitud de la fuerza N de interacción entre la partícula y el émbolo (mientras esta fuerza exista) en función de su distancia z al extremo inferior del tubo.
(b) Calcule la energía mecánica total E del sistema válida mientras la masa M y el émbolo m permanecen en contacto. Obtenga una relación entre $\dot{z}$ y z y los parámetros del sistema.
(c) Calcule la compresión Δ_{min} mínima del resorte al momento de liberarlo, para que en el movimiento resultante la partícula no pierda contacto con el émbolo.
(d) Calcule la compresión Δ_{min} mínima del resorte al momento de liberarlo, para que en el movimiento resultante la partícula llegue al extremo superior del tubo.

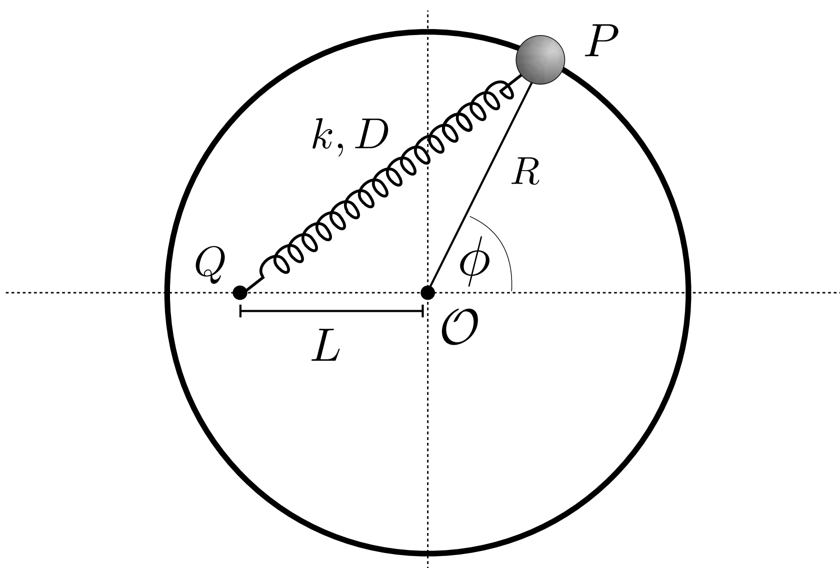


Indicación: Suponga que se cumple $kD = 4(M + m)g$.

P3: En ausencia de gravedad, una partícula P de masa m puede deslizar sin roce por una circunferencia de radio R centrada en el origen $\mathcal{O}$. La partícula está unida a un resorte de constante elástica k y largo natural D. El otro extremo del resorte está fijo a un punto Q que se ubica a una distancia L de $\mathcal{O}$ hacia la izquierda (ver figura). Considere que $L = \frac{1}{\sqrt{2}}R$ y $D = \sqrt{\frac{5}{2}}R$.

(a) Estudie y clasifique los puntos de equilibrio de ϕ.

(b) Obtenga la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a cada punto de equilibrio estable.



Solución P1: **(a)** El momento angular del sistema c/r a $\mathcal{O}$ es $\vec{L} = m(R\hat{\rho}) \times (R\dot{\phi}\hat{\phi}) + m(L\hat{\rho}) \times (L\dot{\phi}\hat{\phi}) = m(R^2 + L^2)\dot{\phi}\hat{k}$. **(b)** El torque c/r a $\mathcal{O}$ es $\vec{\tau} = \vec{0} \times \vec{F}_{\text{eje}} + (R\hat{\rho}) \times \vec{F}_{\text{res}} + (R\hat{\rho}) \times (mg\hat{g}) + (L\hat{\rho}) \times (m\hat{g})$. Se tienen $\vec{F}_{\text{res}} = -k(\phi R - D)\hat{\phi}$ y $\hat{g} = -(\cos\phi\hat{\phi} + \sin\phi\hat{\rho})$. Luego $\vec{\tau} = -\left[Rk(\phi R - D) + mg(R+L)\cos\phi\right]\hat{k}$. **(c)** Usando $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$ obtenemos $\ddot{\phi} + \frac{[Rk(\phi R - D) + mg(R+L)\cos\phi]}{m(R^2+L^2)} = 0$. **(d)** De la indicación: $m(R+L)(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) = 2mg\vec{g} - k(\phi R - D)\hat{\phi} + \vec{F}_{\text{eje}}$. Usando (c): $\vec{F}_{\text{eje}} = -(R+L)\frac{[Rk(\phi R - D) + mg(R+L)\cos\phi]}{(R^2+L^2)}\hat{\phi} - m(R+L)\dot{\phi}^2\hat{\rho} + 2mg(\cos\phi\hat{\phi} + \sin\phi\hat{\rho}) + k(\phi R - D)\hat{\phi}$. Insertando $\phi = \pi/2$ y $\dot{\phi} = 0$ y simplificando: $\vec{F}_{\text{eje}} = -\frac{L(L-R)}{(R^2+L^2)}k(R\pi/2 - D)\hat{\imath} + 2mg\hat{\jmath}$.

Solución P2: **(a)** Mientras M y m se tocan: $m\ddot{z} = N - gm$ y $M\ddot{z} = -k(z-D) - N - gM$. Eliminando $\ddot{z}$ se obtiene: $N = \frac{km}{m+M}(D - z)$ (i.e. hay contacto mientras $D > z$). **(b)** $E = \frac{1}{2}(m+M)\dot{z}^2 + \frac{k}{2}(z-D)^2 + g(M+m)z$. Inicialmente $\dot{z} = 0$ y $z = D - \Delta$. Luego: $E_{\text{ini}} = \frac{k}{2}\Delta^2 + g(M+m)(D-\Delta)$. Igualando $E = E_{\text{ini}}$ obtenemos $\frac{1}{2}(m+M)\dot{z}^2 + \frac{k}{2}(z-D)^2 = \frac{k}{2}\Delta^2 + g(M+m)(D - \Delta - z)$. **(c)** $\dot{z} = 0$ nos da la siguiente ecuación para puntos de retorno $z_r^2 - 2z_r(D - \frac{g}{k}(M+m)) + \left[D^2 - \Delta^2 - \frac{2g}{k}(M+m)(D-\Delta)\right] = 0$. Las soluciones son $z_1 = D - \Delta$ (algura inicial) y $z_2 = D + \Delta - 2\frac{g}{k}(M+m)$ (altura final). Con $D - z > 0$ vemos que $\Delta_{\min} = 2\frac{g}{k}(M+m)$. **(d)** De (a) M se separa en $z = D$. De (b) sigue que al separarse $\dot{z}_0^2 = \frac{k}{m+M}\Delta^2 - 2g\Delta$. A partir de entonces, la energía de M es $E = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + Mgz$ con valor inicial $E_0 = \frac{1}{2}M\dot{z}_0^2 + MgD$. Con $E = E_0$ y punto de retorno $z_r = L = 2D$ encontramos $\Delta^2 - 2g\frac{m+M}{k}\Delta - 8g^2\frac{(m+M)^2}{k^2} = 0$ (se usó indicación). Luego $\Delta = 4g\frac{m+M}{k}$.

Solución P3: **(a)** El largo del resorte es $||R\hat{\rho} - \hat{\imath}L|| = \sqrt{R^2 + L^2 + 2LR\cos\phi}$. Luego $E = \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}^2 + \frac{k}{2}(\sqrt{R^2 + L^2 + 2LR\cos\phi} - D)^2$. De $\dot{E} = 0$ se obtiene $\ddot{\phi} + \frac{kL}{mR}(\frac{D}{\sqrt{R^2+L^2+2LR\cos\phi}} - 1)\sin\phi = 0$ (también puede ser derivada con Segunda Ley de Newton). Los puntos de equilibrio se obtienen para $\ddot{\phi} = 0$, lo cual requiere $\sin\phi_e = 0$ o $D = \sqrt{R^2 + L^2 + 2LR\cos\phi}$. Esto es $\cos\phi_e = \frac{D^2 - R^2 - L^2}{2LR}$. Reemplazando vemos que $\cos\phi_e = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Luego, los puntos de equilibrios son $\phi_e = 0$, $\phi_e = \pi$, $\phi_e = \pi/4$ y $\phi_e = -\pi/4$. Claramente para $\phi_e = 0$ y $\phi_e = \pi$ el resorte está estirado y contraído respectivamente, así que son inestables. Para $\phi_e = \pm\pi/4$ el resorte está en su largo natural, asi que son estables. **(b)** Definiendo $\delta\phi = \phi - \phi_e$ la ecuación de movimiento es $\delta\ddot{\phi} + \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{k}{m}(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}\cos(\phi_e + \delta\phi)}} - 1)\sin(\phi_e + \delta\phi) = 0$. Con Taylor en torno a $\phi_e = \pm\pi/4$ se obtiene: $\delta\ddot{\phi} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{k}{m}\delta\phi = 0$. Sigue que $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{k}{m}}$.