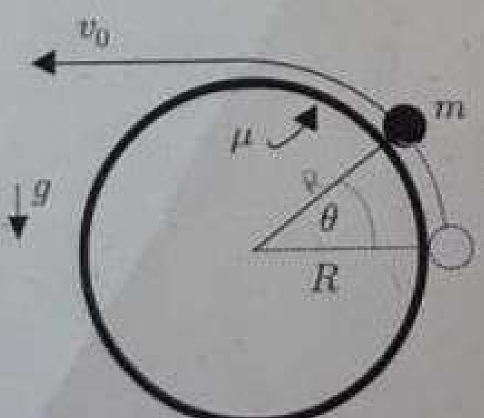
FI2001 Mecánica
Prof. Andrés Escala A.
Control 2
26 de Octubre, 2022
Duración: 3:00

P1 Una partícula de masa m, en presencia de gravedad g, se encuentra atada al extremo de una cuerda sin masa y descansa sobre un cilindro de radio R como se muestra en la figura. La partícula es tirada por la cuerda cuyo otro extremo se mueve con rapidez v_0 constante. Entre el cilindro y la masa existe una fuerza de roce cinético con constante μ. Considere que el instante inicial es en el ángulo $\theta = 0$ y que el instante final es en el punto más alto $(\theta = \pi/2)$

(a) Determine el cambio de energía mecánica total experimentado por la partícula entre el instante inicial y final.

(b) Determine el trabajo efectuado por el roce entre ambos instantes.

(c) Determine el trabajo efectuado por la tensión de la cuerda entre el instante inicial $(\theta = 0)$ y final $(\theta = \pi/2)$.



P2 Una partícula de masa m se encuentra sobre una superficie horizontal sin roce unida a un punto fijo O mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. Adicionalmente actúa sobre ella una fuerza radial $\vec{F}(r) = F_0\hat{r}$, donde F_0 es una constante positiva conocida y r es la coordenada radial de un sistema polar.

(a) Determine la energía potencial V(r) asociada a la fuerza $\vec{F}$.

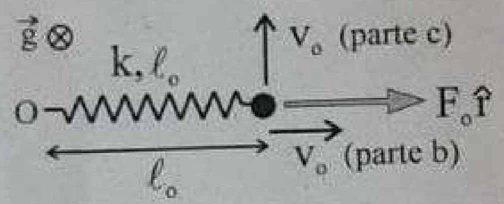
Considere que inicialmente el resorte está en su largo natural l_0. Se pide determinar la rapidez v_0 que debe tener inicialmente la partícula si se desea que el largo máximo que alcance el resorte en el movimiento resultante sea $2l_0$, para cada condición siguiente:

(b) la velocidad inicial es radial.

(c) la velocidad inicial es perpendicular al resorte.

$= Ef$

$\frac{1}{2}k(x-l_0)^2$

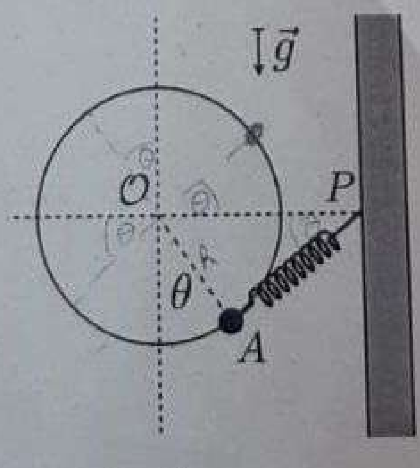


P3 Un anillo A de masa m desliza, en presencia de gravedad g, a lo largo de un alambre con forma de círculo de radio R centrado en O. El anillo está unido a un punto fijo P a través de un resorte k de largo natural $L = \alpha R$, donde α tiene un valor indeterminado. El punto fijo P está a la derecha del centro del círculo O a una distancia $\sqrt{2}$R (ver figura).

(a) Determine la forma del potencial total U(θ) del anillo A como función del ángulo θ.

(b) Para $\alpha = 1$ y g = 0 determine la posición y naturaleza de todos los puntos de equilibrio del sistema.

(c) Vuelva a considerar la presencia de gravedad g y determine el valor de α para que el punto $\theta = \pi/4$ sea un punto de equilibrio estable.

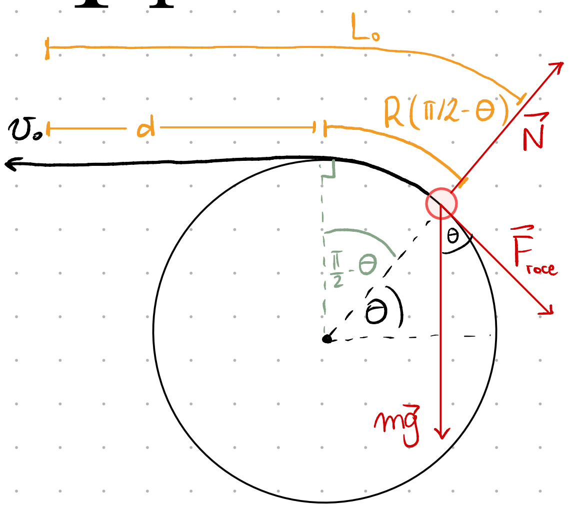


$\frac{1}{2}mV_0^2$

HINT: Recuerde el Teorema del Coseno: para un triángulo de lados x, y, z; el ángulo ϕ opuesto a z cumple $z^2 = x^2 + y^2 - 2xycos\phi$.

Control 2

P1



Encontremos la velocidad de la partícula en función de v_0.

Para esto podemos decir que la cuerda mide L_0 (no conocemos este valor, pero no importa)

$$\Rightarrow L_0 = d + R(\pi/2 - \theta) \quad / \frac{d}{dt}, \text{ derivamos}$$

$$\Rightarrow 0 = \dot{d} - R\dot{\theta}$$

$$= v_0 - R\dot{\theta} \Rightarrow R\dot{\theta} = v_0$$

Ahora ocupamos Newton considerando las fuerzas y polares: Normal, peso, roce y tensión

$$m((\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}) = N\hat{\rho} - \mu N\hat{\theta} - mg\sin\theta\hat{\rho} - mg\cos\theta\hat{\theta} + T\hat{\theta}$$

con $\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ y $\dot{\theta} = v_0/R \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$$\hat{\rho}) \; -mR\dot{\theta}^2 = N - mg\sin\theta$$

$$\hat{\theta}) \; \cancel{mR\ddot{\theta}} = 0 = -\mu N - mg\cos\theta + T$$

$$\hat{\rho}) \rightarrow -mR\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = N - mg\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow N = mg\sin\theta - m\frac{v_0^2}{R}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{roce} = -\mu\left(mg\sin\theta - m\frac{v_0^2}{R}\right)\hat{\theta}$$

a) La energía sería de la forma $E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + U_g(\theta)$ donde $U(\theta) = mgh = mgR\sin\theta$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \quad \} \text{ energía inicial } \theta = 0$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR \quad \} \text{ energía final } \theta = \pi/2 \qquad \Rightarrow \Delta E = E_f - E_0 = mgR$$

b) $$W_{0,\pi/2} = \int_0^{\pi/2} \vec{F}_{roce}(\theta) \cdot d\vec{r} = -\mu \int_0^{\pi/2} \left(mg\sin\theta - m\frac{v_0^2}{R}\right)\hat{\theta} \cdot (d\rho\hat{\rho} + \rho d\theta\hat{\theta})$$

$$= -\mu \int_0^{\pi/2} mg\sin\theta R\,d\theta + \mu m\frac{v_0^2}{R}\int_0^{\pi/2} R\,d\theta$$

$$= \mu m g R \cos\theta \Big|_0^{\pi/2} + \mu m v_0^2 \frac{\pi}{2}$$

$$= -\mu m g R + \frac{\pi}{2}\mu m v_0^2$$

c) Para el trabajo de la tensión podemos hacerlo igual que para b) y utilizando la expresión que saldría de $\hat{\theta}$)

$$\vec{T} = (mg\cos\theta + \mu N)\hat{\theta}$$

$$= \left(mg\cos\theta + \mu\left(mg\sin\theta - m\frac{v_0^2}{R}\right)\right)\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow W_T = \int_0^{\pi/2} \vec{T}(\theta)\cdot d\vec{r} = \ldots = mgR + \mu m g R - \frac{\pi}{2}\mu m v_0^2$$

O podemos usar que de a) sabemos que todos los trabajos producidos por las fuerzas no conservativas sumados dan la variación de la energía mecánica (la normal no hace trabajo)

$$\Rightarrow \Delta E = W_{roce} + W_{Tensión} = mgR$$

$$\Rightarrow W_T = mgR - \left(-\mu m g R + \frac{\pi}{2}\mu m v_0^2\right)$$

$$= mgR + \mu m g R - \frac{\pi}{2}\mu m v_0^2$$

P2

a) Como $\vec{F}(r) = F_0\hat{\rho} \Rightarrow U(\rho) = -\int^{\rho} F_0 d\rho = -F_0\rho$

b) Por lo que la energía sería $E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}k(\rho - l_0) - F_0\rho$

$\Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - F_0 l_0$] energía inicial $\rho = l_0 \wedge |\vec{v}| = v_0$

Para que $2l_0 = \rho_{máx}$ necesitamos imponer $\dot{\rho}(\rho = 2l_0) = 0$

$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}m(\cancel{\dot{\rho}^2} + \underbrace{\cancel{\rho^2\dot{\theta}^2}}_{\text{no hay mov. angular}}) + \frac{1}{2}kl_0^2 - 2F_0 l_0$] energía final $\rho = 2l_0 \wedge \dot{\rho} = \dot{\theta} = 0$

$= \frac{1}{2}kl_0^2 - 2F_0 l_0$

$\Rightarrow E_0 = E_f \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - F_0 l_0 = \frac{1}{2}kl_0^2 - 2F_0 l_0$] conservación energía

$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kl_0^2 - F_0 l_0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{kl_0^2}{m} - \frac{2F_0 l_0}{m}}$

c) Si v_0 es perpendicular, tendremos un momentum angular conservado t.q.

$\Rightarrow \rho^2\dot{\theta} = \rho_0^2\dot{\theta}_0$

$= \rho_0 \cdot (\rho_0\dot{\theta}_0)$

$= l_0 \cdot v_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l_0 v_0}{\rho^2}$

*Solo hay fuerzas en $\hat{\rho}$, nada en $\hat{\theta}$, por lo que se conserva el momentum angular

$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}m\frac{l_0^2 v_0^2}{(2l_0)^2} + \frac{1}{2}kl_0^2 - 2F_0 l_0$] energía final $\rho = 2l_0 \wedge \dot{\rho} = 0 \wedge \dot{\theta} = \frac{l_0 v_0}{\rho^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - F_0 l_0 = \frac{1}{8}mv_0^2 + \frac{1}{2}kl_0^2 - 2F_0 l_0$] conservación energía

$\Leftrightarrow \frac{3}{8}mv_0^2 = \frac{1}{2}kl_0^2 - F_0 l_0$

$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{4kl_0^2}{3m} - \frac{8}{3}\frac{F_0 l_0}{m}}$