MECÁNICA (FI 2001-2) **CONTROL 2** Fecha: 11 junio 2022

Prof. Patricio Aceituno

Profesores auxiliares: Edgardo Rosas, Javier Huenupi; Ayudantes: Felipe Cubillos, Álvaro Flores

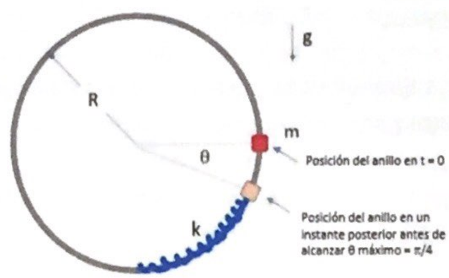
Problema 1.

Un anillo de masa **m** puede deslizar sin roce a lo largo de un aro de radio **R** que se encuentra colocado en posición vertical. El anillo se encuentra atado a un resorte enrollado en el aro (ver figura), cuyo otro extremo está fijo en el punto más bajo del aro. El largo natural del resorte es $L_o = \pi R/2$. Si se suelta el anillo desde el reposo cuando se encuentra en una posición a la misma altura del centro del aro (con el resorte en su largo natural), se verifica que el anillo recorre una distancia máxima $s = \pi R/4$ antes de detenerse y empezar a subir.

a) Determine el valor de la constante elástica **k** del resorte en función de parámetros conocidos. (1 pto)

b) Determine una ecuación cuya solución permita calcular el ángulo θ^* de equilibrio del anillo. (2 pts)

c) Determine el periodo de pequeñas oscilaciones del movimiento resultante al desplazar ligeramente el anillo desde la posición de equilibrio, en función de g, R y θ^* (3 pts)



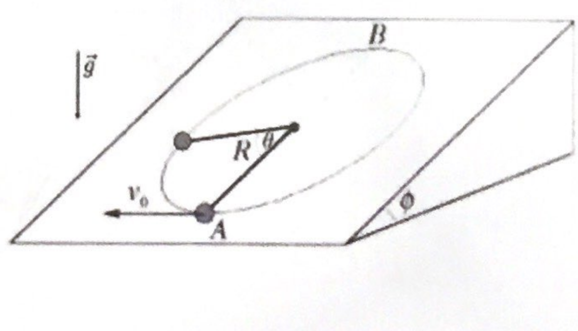
Problema 2.

Considere un plano inclinado con pendiente **ϕ**. Una partícula de masa **m** está fija en el extremo de una barra delgada de largo **R** y masa despreciable cuyo otro extremo se encuentra en un punto fijo del plano. La barra puede girar libremente sobre el plano alrededor de este punto. En el instante inicial la partícula se encuentra en el punto más bajo (punto A), moviéndose con la mínima rapidez (**v_o**) que le permite alcanzar el punto más alto (punto B). Determine:

a) Determine el valor de **v_o** y la rapidez de la partícula $v(\theta)$ en función del ángulo θ que forma la barra con la línea de máxima pendiente (ver figura) (2 ptos).

b) Fuerza de tensión $T(\theta)$ en la barra en función del ángulo θ (2 ptos).

c) Si la barra se reemplaza por una cuerda, indique si la partícula alcanza a llegar al punto B si parte desde el punto A con la rapidez **v_o** calculada en a) (2 ptos)



Problema 3.

Las ciudades de Arica (latitud λ = 18.47°S) y Punta Arenas (latitud λ = 53.15°S) se encuentran aproximadamente en la misma longitud de 70°W. Suponga que es posible construir un túnel que conecte en línea recta estas dos ciudades, cuyas latitudes son λ = 18.47°S (Arica) y λ = 53.15°S (Punta Arenas). Una cápsula presurizada y climatizada de masa **m** (incluyendo la masa de los pasajeros) se desplazaría a lo largo del túnel, impulsada solo por la fuerza gravitacional (desprecie las fuerzas de roce y eventuales efectos de la rotación de la Tierra).

La fuerza de atracción gravitacional que se ejerce sobre una partícula de masa **m** ubicada a una distancia **r** del centro de la Tierra está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F}_m = -G\,\frac{M(r)\,m}{r^2}\,\hat{r} \qquad M(r) \equiv \text{masa en esfera de radio } r \; \begin{cases} = M_T\left(\frac{r}{R_T}\right)^3 & (r < R_T) \\ = M_T & (r \geq R_T) \end{cases}$$

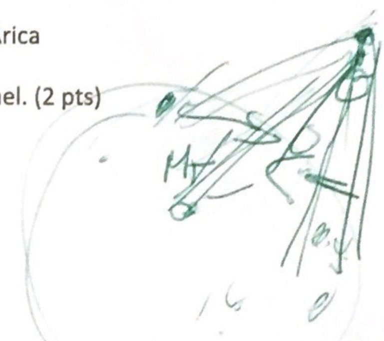
$G = 6,67384 \times 10^{-11}\ \left[\frac{N\,m^2}{Kg^2}\right]$	constante de gravitación universal
$M_T = 5,97 \times 10^{24}\ [Kg]$	masa terrestre
$R_T = 6371\ [Km]$	radio terrestre

a) Determine el largo del túnel y el ángulo de su pendiente con respecto a la horizontal (tangente a la esfera terrestre) en sus extremos en Arica y en Punta Arenas. (0.5 pts)

b) Determine la energía potencial gravitacional para una masa **m** ubicada a la distancia $r < R_T$ del centro de la Tierra (suponga que la Tierra es una esfera de radio R_T) (1 pto)

Suponga que se libera la cápsula desde el reposo en el extremo del túnel en Arica

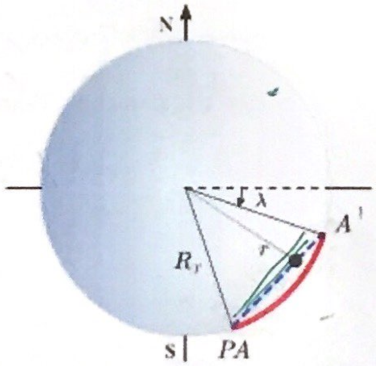
c) Calcule la rapidez máxima que alcanza la cápsula en el interior del túnel. (2 pts)

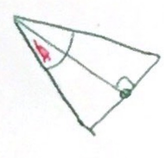


d) ¿Cuánto tiempo tardaría la cápsula en llegar a Punta Arenas? (2 pts)

e) Comente respecto de la factibilidad de este proyecto (0.5 pts)

$$\vec{F}_m = -\frac{G M_T m}{r^2}\,\hat{r}$$





Problema 1

Las fuerzas que realizan trabajo son el peso y la fuerza elástica. Se sabe que ambas son conservativas, y se conoce sus potenciales asociados. Entonces la energía mecánica está dada por la expresión

$$E = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2}k\Delta^2 + mgz, \tag{1}$$

dónde Δ es el estiramiento del resorte y z la coordenada vertical medida desde el centro del anillo (Ver Figura 1). Además, es posible expresar el potencial total al cual está sometida la partícula solo en función del ángulo θ, sabiendo que $\Delta = -R\theta$ y $z = -R\cos\theta$. De esta manera la energía mecánica satisface la relación

$$E = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 - mgR\sin\theta. \tag{2}$$

Como no existen fuerzas no conservativas, la energía se conserva. Conocemos 2 estados de energía que por conservación deben ser equivalentes. El primero en $t = 0$ con rapidez, estiramiento y altura nulas, y el segundo con rapidez nula en $\theta = \frac{\pi}{4}$. Usando la Ec. (2) se obtiene la ecuación

$$0 = \frac{1}{2}kR^2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - mgR\sin\frac{\pi}{4}, \tag{3}$$

desde dónde se extrae directamente que la constante elástica k está dada por la expresión

$$k = \frac{16\sqrt{2}mg}{\pi^2 R}. \tag{4}$$

De la Ec. (2) se puede observar que el potencial coincide con el potencial efectivo, y este junto a sus derivadas relevantes, estan dados por

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{2}kR^2\theta^2 - mgR\sin\theta, && \text{(5a)}\\ \partial_\theta V(\theta) &= kR^2\theta - mgR\cos\theta, && \text{(5b)}\\ \partial_\theta^2 V(\theta) &= kR^2 + mgR\sin\theta. && \text{(5c)} \end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio satisfacen $\partial_\theta V(\theta^*) = 0$. En consecuencia, y en virtud de la Ec. (5b), la ecuación que permite encontrar los puntos de equilibrio está dada por

$$\theta^* = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}\cos\theta^*. \tag{6}$$

Por otra parte, en los puntos de equilibrio θ^* que sean estables, se sabe que la expresión para calcular la frecuencia de pequeñas oscilaciones viene dada por $\omega_{\text{p.o.}}^2 = \frac{1}{mR^2}\partial_\theta^2 V(\theta^*)$, y entonces en virtud de la Ec. (5c) se cumple

$$\omega_{\text{p.o.}}^2 = \frac{g}{R}\left(\frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} + \sin\theta^*\right). \tag{7}$$

Por último, dado que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, se obtiene lo pedido, es decir,

$$T^2 = \frac{4\pi^4 R}{g(16\sqrt{2} + \pi^2\sin\theta^*)}. \tag{8}$$

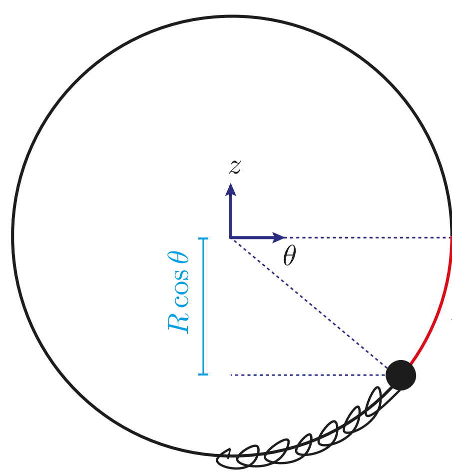


Figure 1: Problema 1

Problema 2

La única fuerza que realiza trabajo es el peso, el cual es conservativo, y su potencial asociado es $V(z) = mgz$. En consecuencia la energía mecánica viene dada por

$$E = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 + mgz. \tag{9}$$

Usando un sistema de referencia paralelo al plano inclinado, como se muestra en la Figura 2, se tiene que $y = -R\cos\theta$ y $z = y\sin\phi$. En consecuencia, se cumple $z = R\cos\theta\sin\phi$ y entonces la Ec. (**??**) se reescribe como

$$E = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 - mgR\sin\phi\cos\theta. \tag{10}$$

La ausencia de fuerzas no conservativas nos permite asegurar que la energía es conservada. Consideramos 2 estados dinámicos. El primero con $\theta = 0$ y rapidez v_0, y el segundo con $\theta = \pi$ y $\|\mathbf{v}\| = 0$. Ambos estados tienen la misma energía y entonces

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR\sin\phi = mgR\sin\phi, \tag{11}$$

desde dónde se obtiene directamente que

$$v_0^2 = 4gR\sin\phi. \tag{12}$$

Usando el resultado obtenido en la Ec. (12) se puede usar la conservación de energía entre $\theta = 0$ y algún θ arbitrario, entonces se obtiene

$$v(\theta)^2 = 2gR\sin\phi(1+\cos\theta). \tag{13}$$

Usando coordenadas polares coplanares al plano inclinado, se puede ver que la ecuación de mov. en la dirección $\hat{\rho}$ está dada por

$$-T + mg\sin\phi\cos\theta = -\frac{mv(\theta)^2}{R}. \tag{14}$$

Reemplazando la velocidad obtenida en la Ec. (13) se obtiene directamente la tensión, cuya magnitud está dada por

$$T(\theta) = mgR\sin\phi(2+3\cos\theta). \tag{15}$$

En la Ec. (15) se observa que para algún $\theta^* < \frac{\pi}{2}$ la tensión es nula, pues se tiene que $2+3\cos\theta^* = 0$, y entonces para todo θ tal que $\theta^* < \theta < \frac{\pi}{2}$ se cumple que $T < 0$, lo cual no es posible para una cuerda.

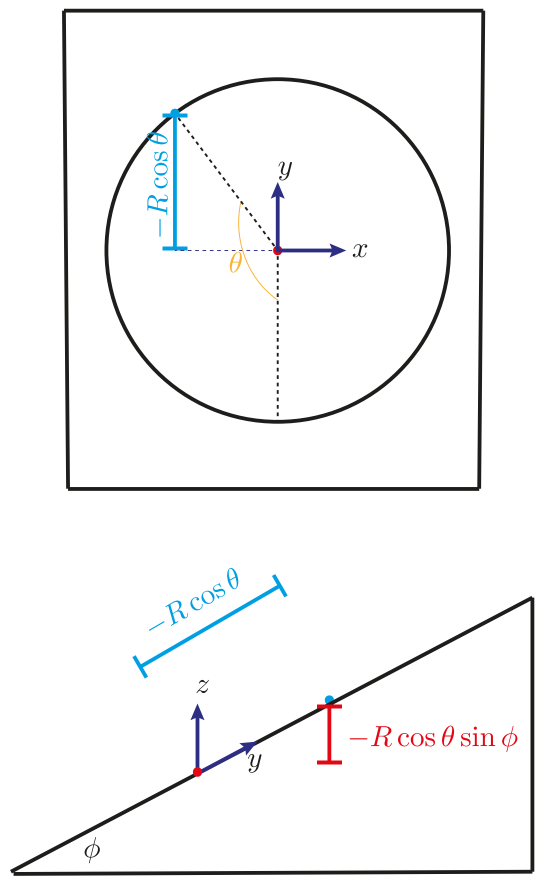


Figure 2: Problema 2

Problema 3

Por simplicidad ubicamos el túnel paralelo al eje x. Oservando la geometría del problema en la Figura 3 se puede notar que $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, además es claro que la pendiente del túnel γ en ambas ciudades es igual y satisface $\gamma = \frac{\Delta\lambda}{2}$. El largo del túnel ℓ, tal como muestra la Figura 3, está dado por

$$\ell = 2R_T \sin\gamma \tag{16}$$

Dentro del túnel se cumple siempre que $r < R_T$, por lo tanto la fuerza que siente la cabina está dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{R_T^3}\mathbf{r} \tag{17}$$

Definimos $k = GMm/R_T^3$ y entonces la fuerza es exactamente la de un resorte de constante elástica k y largo natural nulo. Se sabe que esta fuerza es conservativa, y su potencial asociado está dado por

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2. \tag{18}$$

Como no existen fuerzas no conservativas la energía se conserva. Inicialmente la partícula se encuentre en reposo a una distancia $r = R_T$ del centro de la tierra, y entonces por conservación es cierto que

$$V(R_T) = V(r) + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2. \tag{19}$$

De la Ec. (19) se extrae directamente que el máximo de la rapidez $\|\mathbf{v}\|$ se alcanza cuando $V(r)$ sea mínimo. En virtud de la Ec. (18) se observa que el mínimo de $V(r)$ ocurre cuando r es mínimo. De la Fig. 3 se extrae que la distancia mínima al origen de la cabina es $R_{\text{min}} = R_T\cos\gamma$. Por lo tanto, en virtu de la Ec. (19), la rapidez máxima está dada por

$$v_{\text{max}}^2 = \frac{GM}{R_T}(1 - \cos^2\gamma). \tag{20}$$

Observando la Figura 3 se puede notar que $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}}$ y $r^2 = R_{\text{min}}^2 + x^2$. Teniendo esta consideración, desde la Ec. (19) se obtiene

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{GM}{R_T^3}[R_T^2 - R_{\text{min}}^2 - x^2]}}. \tag{21}$$

Resulta útil definir $R_T^2 = R_{\text{min}}^2 + x_{\text{max}}^2$, de tal manera que

$$T = \sqrt{\frac{R_T^3}{GM}}\int_{-x_{\text{max}}}^{+x_{\text{max}}}\frac{dx}{\sqrt{x_{\text{max}}^2 - x^2}}. \tag{22}$$

Sabiendo que $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(x/a)$ se obtiene directamente el tiempo buscado por medio de la expresión

$$T = \pi\sqrt{\frac{R_T^3}{GM}}. \tag{23}$$

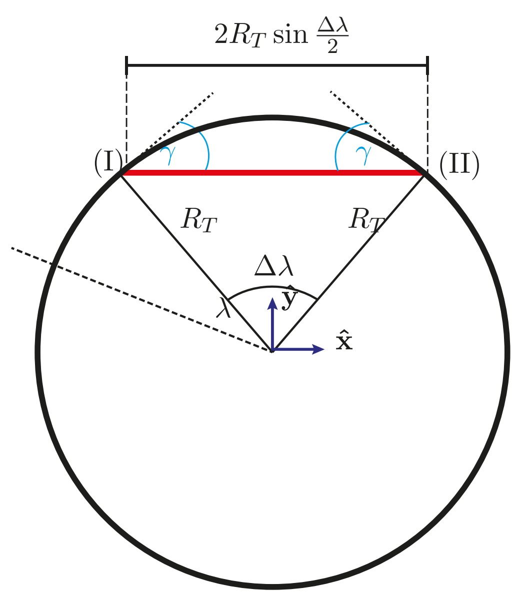


Figure 3: Problema 3

Observando los resultado numéricos en la Tabla 1 se puede ver que existen hartos inconvenientes para lograr que una idea como la planteada se materialice. Primero que todo, resulta muy complicado excavar un túnel de tal longitud, pues el agujero mas profundo que ha lograd cavar la humanidad es de 12.2 km. Por otra parte, la parte mas profunda del túnel estaría a una profundidad de 290 km, en dónde la temperatura es por sobre los 1000 C°. Además, la velocidad máxima que alcanzaría dicha cabina excede la velocidad del sonido, por lo que habría que tener consideraciones adicionales en su construcción.

ℓ (km)	$v_{\max}$ (km/s)	T (min)
3797	2.35	42.18

Table 1: Valores numéricos P3