MECANICA (FI2001) **CONTROL 1** 24 noviembre 2021

Prof.: Patricio Aceituno
Prof. Auxiliares: Mauricio Rojas, Edgardo Rosas, Javier Huenupi

Tiempo: 3 horas

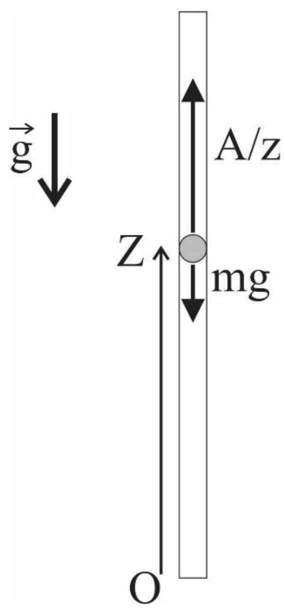
1. Una partícula de masa *m* que se encuentra en un tubo vertical se puede mover por su interior bajo la acción de dos fuerzas: el peso mg y una fuerza de magnitud $F = \frac{A}{z}$ que apunta verticalmente hacia arriba (*A* constante conocida y *z* la coordenada vertical de la partícula).

a) Determine la posición z_* de equilibrio de la partícula y la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a éste, cuando la partícula se desplaza ligeramente desde esa posición. [2.5 pts.]

b) Estando la partícula en su posición de equilibrio z_*, determine la magnitud de la velocidad v_o que hay que darle para que ascienda hasta una altura $z_{max} = 2\, z_*$. [2.5 pts.]

c) Determine la aceleración de la partícula en el momento que alcanza la altura máxima z_{max}.

[1.0 pt.]

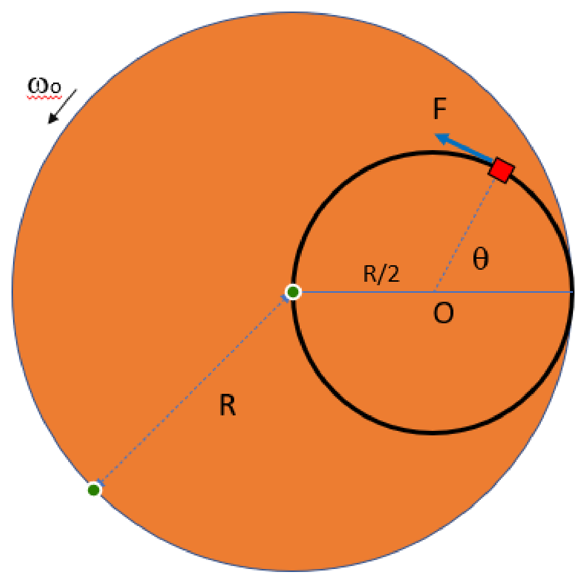


2. Considere una plataforma horizontal de radio *R* que gira con velocidad angular constante ω_o respecto de un eje vertical que pasa por su centro. Sobre la plataforma hay fijo a ella un riel de forma circular de radio *R/2* como se indica en la figura. Sobre el riel se mueve un pequeño carro, de masa *m*, con rapidez v_o constante relativa a la plataforma, impulsado por una fuerza **F** tangente al riel y de magnitud variable que permite que esto ocurra. Todos los roces son despreciables.

a) Determine la rapidez absoluta del carro, es decir respecto de un sistema de referencia inercial con velocidad nula externo a la plataforma, cuando pasa por el punto en el cual $\theta = \pi/2$. (2 Pts.)

b) Determine la magnitud de la aceleración absoluta del carro, es decir, respecto de un sistema de referencia inercial con velocidad nula externo a la plataforma, cuando pasa por el punto en el cual $\theta = \pi/2$. (2 Pts.)

c) Escriba las ecuaciones de movimiento del carro respecto del sistema de coordenadas polares mostrado en la figura cuyo origen está en el centro del círculo descrito por el riel. Indique el mayor valor que alcanza la magnitud de la fuerza **F** que se requiere para que el carro se mueva con rapidez constante v_o relativa a la plataforma y el ángulo θ en que la magnitud de **F** es máxima. (2 Pts.)



OBSERVACIONES

- Entregar respuestas de los dos problemas en 2 archivos SEPARADOS.
- El texto de las respuestas debe ser legible.
- Las hojas de respuesta deben contener el nombre, RUT y la firma del estudiante. En el acto de firmar el estudiante certifica que su respuesta la obtuvo en forma personal, sin ayuda de terceras personas.

C.2

P.1 $\vec{F} = \left(\frac{A}{z} - mg\right)\hat{k}$

$-dV = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{A}{z} - mg\right)dz$

$V(z) = mgz - A\ln z$

a) z^* de equilibrio $F(z)=0 \rightarrow \boxed{z^* = \frac{A}{mg}}$

1/1

Frecuencia ω_0 de pequeñas oscilaciones

$\omega_0^2 = \frac{1}{m}\frac{d^2V}{dz^2}\Big|_{z^*}$ $\qquad \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{A}{z^2}$

$\omega_0^2 = \frac{1}{m}\frac{A}{A^2}m^2g^2 = \frac{mg^2}{A}$

1.5/1.5

$\omega_0 = g\sqrt{\frac{m}{A}} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{g}\sqrt{\frac{A}{m}}}$

Text

Si solo llego a esto: -0.2

b) CONSERVACIÓN DE ENERGÍA

$\frac{1}{2}mv_0^2 + V(z^*) = V(2z^*)$ 2.5/2.5

$v_0 = \left[\frac{2A}{m}(1 - \ln 2)\right]^{1/2}$

c) En $z = 2z^*$ $\quad F(2z^*) = ma$

$\frac{A}{2z^*} - mg = ma \rightarrow \frac{\cancel{A}}{2\cancel{A}}mg - \cancel{m}g = \cancel{m}a$

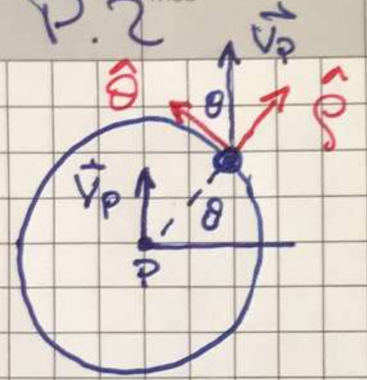
$\boxed{a = -\frac{g}{2}}$

1/1

Día Mes Año

P.2

a)



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_p + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}'$$

$$\vec{v}' = v_0 \hat{\theta}$$

$$\vec{v}_p = \omega_0 \frac{R}{2} \left(\operatorname{sen}\theta \hat{\rho} + \cos\theta \hat{\theta} \right)$$

$$\vec{\omega}_0 \times \vec{r}' = \omega_0 \hat{k} \times \frac{R}{2} \hat{\rho} = \omega_0 \frac{R}{2} \hat{\theta}$$

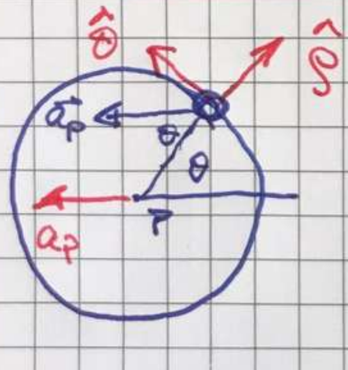
$$\vec{v} = \omega_0 \frac{R}{2} \operatorname{sen}\theta \hat{\rho} + \left[v_0 + \omega_0 \frac{R}{2} (1 + \cos\theta) \right] \hat{\theta}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \vec{v}_{\pi/2} = \frac{\omega_0 R}{2} \hat{\rho} + \left(v_0 + \omega_0 \frac{R}{2} \right) \hat{\theta}$$

$$v = \left[\frac{\omega_0^2 R^2}{4} + \left(v_0 + \frac{\omega_0 R}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

2/2
$$\boxed{v_{\theta = \pi/2} = \left[\frac{\omega_0^2 R^2}{2} + v_0^2 + v_0 \omega_0 R \right]^{1/2}}$$

b)



$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_p + 2 \vec{\omega}_0 \times \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}')$$

$$\vec{a}' = - \frac{v_0^2}{R/2} \hat{\rho}$$

$$\vec{a}_p = \omega_0^2 \frac{R}{2} \left(- \cos\theta \hat{\rho} + \operatorname{sen}\theta \hat{\theta} \right)$$

$$2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}' = 2\omega_0 \hat{k} \times v_0 \hat{\theta}$$
$$= -2 v_0 \omega_0 \hat{\rho}$$

$$\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') = \omega_0 \hat{k} \times \left(\omega_0 \hat{k} \times \frac{R}{2}\hat{\rho}\right)$$
$$= \omega_0^2 \frac{R}{2}\, \hat{k} \times \hat{\theta} = -\frac{\omega_0^2 R}{2}\hat{\rho}$$

$$\vec{a} = -2\frac{V_0^2}{R}\hat{\rho} - \frac{\omega_0^2 R}{2}\cos\theta\,\hat{\rho} + \frac{\omega_0^2 R}{2}\sin\theta\,\hat{\theta} -$$
$$- 2\omega_0 v_0 \hat{\rho} - \omega_0^2 \frac{R}{2}\hat{\rho}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

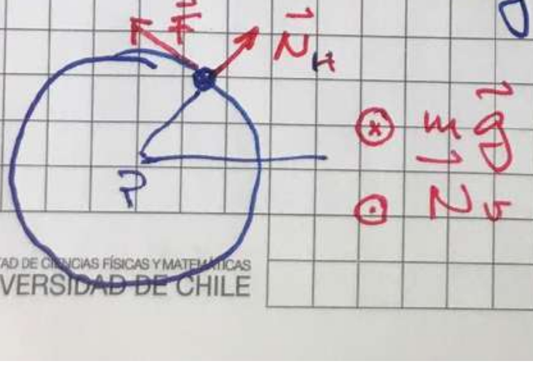
$$\vec{a} = -\left(\frac{2V_0^2}{R} + 2v_0\omega_0 + \omega_0^2\frac{R}{2}\right)\hat{\rho} + \omega_0^2\frac{R}{2}\hat{\theta}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \left[\left(\frac{2V_0^2}{R} + 2v_0\omega_0 + \omega_0^2\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{\omega_0^4 R^2}{4}\right]^{1/2}}$$

2/2

c) Ec. movimiento

$$m\vec{a}' = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}_V + \vec{N}_H + (-m\vec{a}_P) +$$
$$+ 2\vec{v}' \times \vec{\omega}_0 +$$
$$+ (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') \times \vec{\omega}_0$$



P.2. (3)

$$\boxed{m\vec{a}' = -m\frac{v_0^2}{R/2}\hat{\rho}} \qquad \boxed{m\vec{g} + \vec{N}_V = 0}$$

$$\boxed{\vec{N}_H = N_H\hat{\rho}} \qquad \boxed{\vec{F} = F\hat{\theta}}$$

$$-m\vec{a}_p = \omega_0^2\frac{R}{2}(\cos\theta\,\hat{\rho} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta})$$

$$2\vec{v}'\times\vec{\omega}_0 = 2v_0\omega_0\,\hat{\rho}$$

$$(\vec{\omega}_0\times\vec{r}')\times\vec{\omega}_0 = \omega_0^2\frac{R}{2}\,\hat{\rho}$$

COMPONENTE DE EC. DE MOV. SEGUN $\hat{\theta}$

$\hat{\theta}$) $$0 = F - \omega_0^2\frac{R}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$F = \frac{\omega_0^2 R}{2}\operatorname{sen}\theta \quad m$$

$$|F|_{MAX} = \frac{\omega_0^2 R}{2} \quad \text{en } \theta_1 = \pi/2$$

$$\text{y } \theta_2 = \frac{3\pi}{2}$$

7/2