FI-2001 Mecánica - Sección-2
Prof. Gonzalo A. Palma.
Auxiliares: Javier Huenupi y Eduardo Droguett
Ayudantes: Thiare González y Lukas Philippi
FCFM, Universidad de Chile

Control 1
Miércoles 10 de Abril, 2024
Tiempo: 3horas

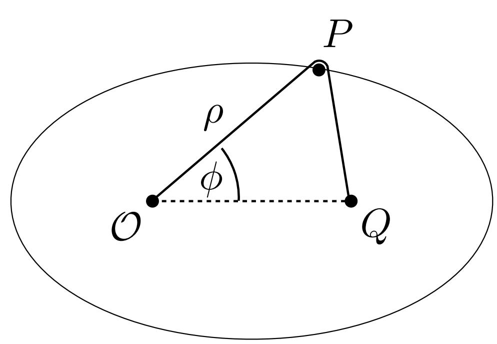
P1: Una cuerda inextensible de largo $2L$ tiene sus extremos fijos en los puntos $\mathcal{O}$ y Q de una superficie horizontal, separados entre sí por una distancia L (ver figura). Una partícula P se mueve sin roce sobre la superficie, por el lado interior de la cuerda de modo que ésta se mantiene siempre tensa (ver figura).

(a) 2.0pts. Utilizando un sistema de coordenadas polares donde ρ es la distancia entre $\mathcal{O}$ y P, y ϕ el ángulo que forma la línea $\mathcal{O}P$ con la línea $\mathcal{O}Q$, demuestre que su trayectoria está descrita por:

$$\rho(\phi) = \frac{3L}{2(2-\cos\phi)}. \tag{1}$$

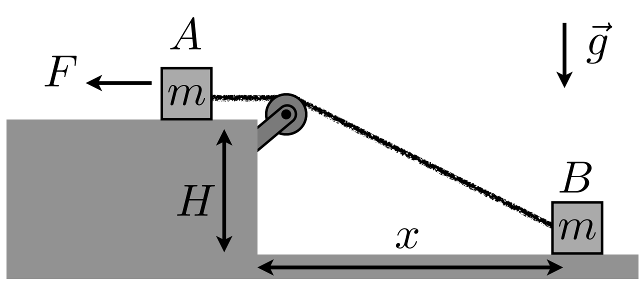
(b) 2.0pts. Si $\dot{\phi} = \omega_0$ constante, determine la rapidez de la partícula para la posición $\phi = \pi/3$.
(c) 2.0pts. Determine el radio de curvatura ρ_c de la trayectoria para la posición $\phi = \pi/3$.

Indicación: Note que el radio de curvatura puede ser expresado como $\rho_c = v^3/||\vec{a} \times \vec{v}||$.



P2: Considere dos bloques, ambos de masa m, unidos por una cuerda inextensible de largo L. Los bloques se mueven sin roce sobre planos horizontales que tienen entre ellos un desnivel H. Mediante una fuerza externa F de magnitud variable se logra que el bloque ubicado en el plano más alto (bloque A) se desplace hacia la izquierda con rapidez constante v_0, arrastrando mediante la cuerda el bloque que se encuentra en el plano inferior (bloque B). Para el instante cuando el bloque del plano inferior alcanza una distancia $x = H$ de la base del peldaño determine lo siguiente:

(a) 1.5pts. Rapidez y aceleración del bloque B.
(b) 1.5pts. Tensión de la cuerda.
(c) 1.5pts. Magnitud de la fuerza F.
(d) 1.5pts. Fuerza normal que la superficie inferior ejerce sobre el bloque B.



P3: Una partícula P de masa m cuelga de una cuerda AP de largo L cuyo extremo superior permanece fijo en A. La partícula realiza un movimiento circular sobre la superficie de una esfera de radio L cuyo origen $\mathcal{O}$ se encuentra justo debajo de A, a una distancia $\sqrt{2}L$. Inicialmente la partícula gira en torno al eje $\mathcal{O}A$ con una velocidad angular ω_0, tal que la fuerza normal que la esfera ejerce sobre P es nula. Además, sobre la partícula actúa una fuerza gravitacional $F_g = m\vec{g}$ (ver figura) y una fuerza de roce cinética de la forma $\vec{F}_{\text{roce}} = -F_0\hat{t}$, donde $\hat{t} = \vec{v}/||\vec{v}||$ y F_0 es una constante positiva. Cuidado: note que esta fuerza no coincide con la fuerza de roce cinética vista en clases.

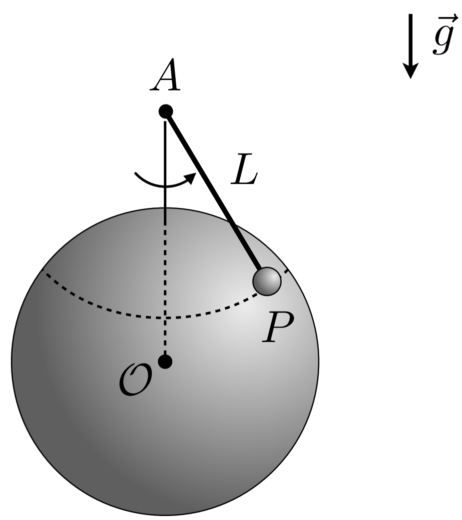
(a) 3pts. Identifique todas las fuerzas y obtenga la ecuación de movimiento respetada por la partícula utilizando coordenadas esféricas con $\vec{r} = L\hat{r}$.

(b) 0.5pts. Determine el valor de la velocidad angular inicial ω_0 como función de L y g.

(c) 1.5pts. Encuentre la velocidad angular de la partícula en torno al eje $\mathcal{O}A$, como función del ángulo barrido por la partícula desde el momento inicial.

(d) 0.5pt. Determine el valor de la fuerza que la cuerda ejerce sobre la partícula en función del ángulo barrido por la partícula desde el momento inicial.

(e) 0.5pt. Obtenga el ángulo total ϕ_{tot} que barre P desde el momento inicial hasta que se detiene.



Ayuda 1: Note que la recta AP es tangente a la superficie de la esfera. Es decir, $\theta = \pi/4$ donde θ es el ángulo entre las rectas $\mathcal{O}A$ y $\mathcal{O}P$.

Ayuda 2: Algunas relaciones cinemáticas en coordenadas esféricas: ($\vec{r} = r\hat{r}$)

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)\hat{\phi}$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}\hat{\theta}, \qquad \dot{\hat{\theta}} = \dot{\phi}\cos\theta\hat{\phi} - \dot{\theta}\hat{r}, \qquad \dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}(\cos\theta\hat{\theta} + \sin\theta\hat{r})$$

Soluciones (pueden haber errores):

P1: **(a)** Tenemos $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$. El vector que va desde Q a P es $\vec{r} - L\hat{\imath}$. De acuerdo al enunciado su modulo satisface $||\vec{r} - L\hat{\imath}|| = 2L - \rho$. Elevando al cuadrado, se tiene que $\rho^2 + L^2 - 2L\vec{r}\cdot\hat{\imath} = 4L^2 + \rho^2 - 4L\rho$. Despejando ρ sigue directamente que $\rho(\phi) = \frac{3L}{2(2-\cos\phi)}$. **(b)** Se tiene $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}$. Usando $\dot{\rho} = \frac{\partial\rho}{\partial\phi}\dot{\phi} = -\frac{3L}{2(2-\cos\phi)}\frac{\sin\phi}{(2-\cos\phi)}\omega_0$ en el resultado de la parte anterior, sigue que $\vec{v} = \frac{3L\omega_0}{2(2-\cos\phi)}(-\frac{\sin\phi}{(2-\cos\phi)}\hat{\rho} + \hat{\phi})$. Evaluando en $\phi = \pi/3$ sigue que $\vec{v} = L\omega_0(-\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{\rho} + \hat{\phi})$ de donde se obtiene $v = \frac{2L\omega_0}{\sqrt{3}}$. **(c)** Sabemos que $\rho_c = v^3/||\vec{a} \times \vec{v}||$. La aceleración es $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \omega_0^2\rho)\hat{\rho} + 2\omega_0\dot{\rho}\hat{\phi}$. Usando $\ddot{\rho} = -\frac{3L}{2(2-\cos\phi)^2}\cos\phi\,\omega_0^2 + \frac{6L}{2(2-\cos\phi)^3}\sin\phi^2\omega_0^2$ y evaluando en $\phi = \pi/3$ vemos que $\ddot{\rho} = \frac{L}{3}\omega_0^2$, de donde $\vec{a} = -\frac{2}{3}\omega_0^2 L(\hat{\rho} + \sqrt{3}\hat{\phi})$. Juntando todo obtenemos: $\rho_c = \frac{2}{\sqrt{3}}L$.

P2: **(a)** El largo de la cuerda entre la polea y B es $\sqrt{x^2 + H^2}$. La cuerda es recogida con rapidez constante v_0, por lo que se debe cumplir que $\sqrt{x^2 + H^2} = \ell_0 + v_0(t_0 - t)$ donde ℓ_0 y t_0 son el largo y tiempo inicial. Derivando con respecto al tiempo $\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2+H^2}} = -v_0$. Sigue que $\dot{x} = -v_0\sqrt{1 + \frac{H^2}{x^2}}$. Derivando nuevamente $\ddot{x} = \frac{v_0}{\sqrt{1+\frac{H^2}{x^2}}}\frac{H^2}{x^3}\dot{x} = -v_0^2\frac{H^2}{x^3}$. Cuando $x = H$ se tiene $\dot{x} = -\sqrt{2}v_0$ y $\ddot{x} = -\frac{v_0^2}{H}$. **(b)** La segunda ley para B es: $m\ddot{x}\hat{\imath} = (N_B - mg)\hat{\jmath} + T\frac{-x\hat{\imath}+H\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2+H^2}}$ (aquí $\frac{-x\hat{\imath}+H\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2+H^2}}$ es el vector unitario que apunta a lo largo de la cuerda). Reemplazando $x = H$ la componente $\hat{\imath}$ revela que $T = \frac{m\sqrt{2}v_0^2}{H}$. **(c)** La aceleración de A es nula. Luego la segunda ley para A es $0 = (T - F)\hat{\imath} + (N_A - mg)\hat{\jmath}$. Sigue que $F = T = \frac{m\sqrt{2}v_0^2}{H}$. **(d)** Volviendo al bloque B, la fuerza normal es $N_B = mg - \frac{T}{\sqrt{2}} = m(g - \frac{v_0^2}{H})$.

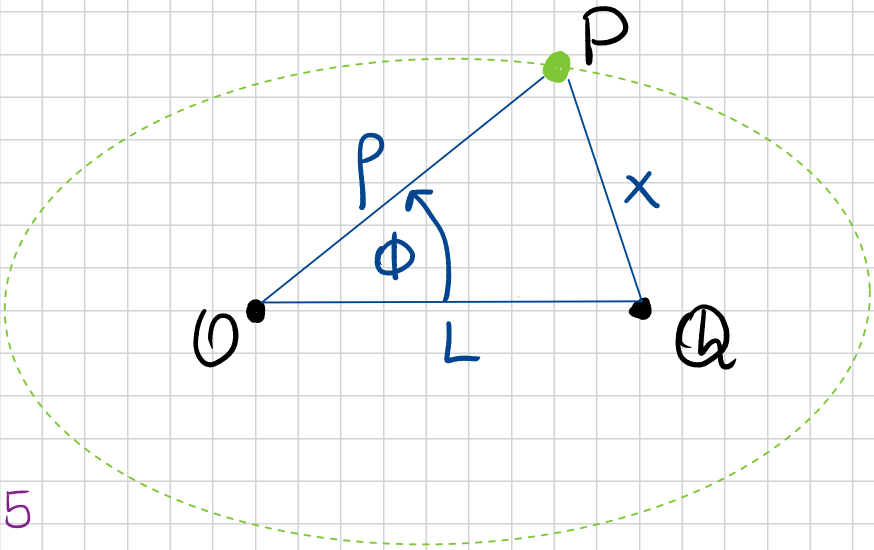
P3: **(a)** Tomando en cuenta todas las fuerzas, y usando $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, la segunda ley es:

$$\frac{m}{2}(-L\dot{\phi}^2)\hat{r} + \frac{m}{2}(-L\dot{\phi}^2)\hat{\theta} + \frac{m}{\sqrt{2}}L\ddot{\phi}\hat{\phi} = N\hat{r} + \frac{m}{\sqrt{2}}g(\hat{\theta} - \hat{r}) - T\hat{\theta} - F_0\hat{\phi}.$$

De la componente $\hat{\phi}$ vemos que $\ddot{\phi} + \frac{F_0\sqrt{2}}{mL} = 0$. **(b)** Se nos dice que inicialmente $N = 0$. Luego la componente $\hat{r}$ implica$\omega_0^2 = \sqrt{2}\frac{g}{L}$. **(c)** Integrando la ecuación de movimiento una vez obtenemos $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{F_0\sqrt{2}}{mL}\phi = C$. Inicialmente $\phi = \phi_0$ y $\dot{\phi} = \omega_0$ (si se quiere $\phi_0 = 0$). Luego $C = \frac{1}{2}\omega_0^2 + \frac{F_0\sqrt{2}}{mL}\phi_0$. Sigue que $\dot{\phi} = -\sqrt{\omega_0^2 - \frac{2\sqrt{2}F_0}{mR}\Delta\phi}$, donde $\Delta\phi = \phi - \phi_0$ es el ángulo barrido desde el inicio. **(d)** A partir de la componente $\hat{\theta}$ vemos que $T = \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{m}{2}L(\omega_0^2 - \frac{2\sqrt{2}F_0}{mR}\Delta\phi)$. **(e)** La partícula se detiene cuando $\dot{\phi} = 0$, de donde se deduce que $\phi_{\text{tot}} = \omega_0^2\frac{mR}{\sqrt{2}F_0}$.

Control 1

P1



a) Por teo. del coseno se tiene que

$$x^2 = \rho^2 + L^2 - 2\rho L\cos\phi \quad +0.8$$

y como la cuerda mide $2L$ en total, entonces

$$\rho + x = 2L \Rightarrow x = 2L - \rho \quad +0.5$$

juntando ambas eqs.

$$(2L-\rho)^2 = \rho^2 + L^2 - 2\rho L\cos\phi$$

$$4L^2 - 4L\rho + \cancel{\rho^2} = \cancel{\rho^2} + L^2 - 2\rho L\cos\phi$$

$$\Leftrightarrow 3L^2 = L\rho(4 - 2\cos\phi)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho(\phi) = \frac{3}{2}\frac{L}{2-\cos\phi}} \quad +0.7$$

b) La velocidad en coordenadas cilíndricas con origen en O sería

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} \quad +0.4$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\frac{L}{2-\cos\phi}\right)\hat{\rho} + \frac{3}{2}\frac{L}{2-\cos\phi}\,\omega_0\,\hat{\phi}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{L}{(2-\cos\phi)^2}\sin\phi\,\omega_0\,\hat{\rho} + \frac{3}{2}\frac{L}{2-\cos\phi}\,\omega_0\,\hat{\phi} \quad +0.6$$

donde se utilizó que, por enunciado, $\dot{\phi} = \omega_0$ constante $\forall t$. Evaluando en $\phi = \pi/3$ obtenemos

$$\vec{v}(\phi=\pi/3) = -\frac{3}{2}\frac{L}{(2-1/2)^2}\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\hat{\rho} + \frac{3}{2}\frac{L}{2-1/2}\omega_0\hat{\phi}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}L\omega_0\hat{\rho} + L\omega_0\hat{\phi} \quad +0.5$$

y si tomamos su magnitud

$$\|\vec{v}(\phi=\pi/3)\| = \sqrt{\frac{3}{9}L^2\omega_0^2 + L^2\omega_0^2} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}L\omega_0} \quad +0.5$$

c) Para calcular el radio de curvatura ocupamos la indicación, así que debemos calcular la aceleración.

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \overbrace{\cancel{\rho\ddot{\phi}}}^{=0})\hat{\phi} \qquad +0.4$$

$$\triangleright\ \ddot{\rho} = \frac{d}{dt}\left[-\frac{3}{2}\frac{L}{(2-\cos\phi)^2}\sin\phi\,\omega_0\right]$$

$$= -\frac{3}{2}L\omega_0\frac{1}{(2-\cos\phi)^4}\left(\cos\phi\,\omega_0(2-\cos\phi)^2 - 2\sin\phi(2-\cos\phi)\sin\phi\,\omega_0\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{L\omega_0^2}{(2-\cos\phi)^4}\left(\cos\phi(2-\cos\phi)^2 - 2\sin^2\phi(2-\cos\phi)\right)$$

que evaluado en $\phi = \pi/3$ es

$$\Rightarrow \ddot{\rho}(\phi=\pi/3) = -\frac{3}{2}\frac{2^4}{3^4}L\omega_0^2\left(\frac{1}{2}\frac{9}{4} - 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{8}{27}L\omega_0^2\left(\frac{9}{8} - \frac{18}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{3}L\omega_0^2$$

Reemplazando todo lo encontrado

$$\vec{a}(\phi=\pi/3) = \left(\frac{1}{3}L\omega_0^2 - L\omega_0^2\right)\hat{\rho} - \frac{2\sqrt{3}}{3}L\omega_0^2\hat{\phi}$$

$$= -\frac{2}{3}L\omega_0^2\hat{\rho} - \frac{2\sqrt{3}}{3}L\omega_0^2\hat{\phi} \qquad +0.6$$

y con esto hacemos el producto cruz

$$[\vec{v}\times\vec{a}](\phi=\pi/3) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}L\omega_0\hat{\rho} + L\omega_0\hat{\phi}\right)\times\left(-\frac{2}{3}L\omega_0^2\hat{\rho} - \frac{2\sqrt{3}}{3}L\omega_0^2\hat{\phi}\right)$$

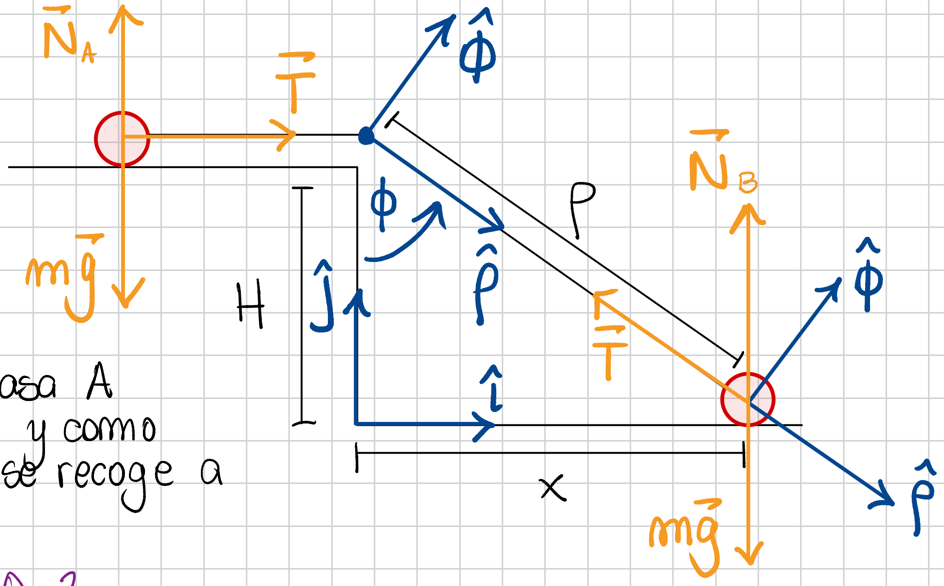
$$= \frac{2}{3}L^2\omega_0^3\hat{k} + \frac{2}{3}L^2\omega_0^3\hat{k}$$

$$= \frac{4}{3}L^2\omega_0^3\hat{k} \Rightarrow \|\vec{v}\times\vec{a}\|(\phi=\pi/3) = \frac{4}{3}L^2\omega_0^3 \qquad +0.5$$

Con lo que podemos calcular ρ_c

$$\rho_c(\phi=\pi/3) = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{a}\times\vec{v}\|} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}L}{3}} \qquad +0.5$$

P2



a) Primero ocuparemos coord. polares con origen en la polea. Sabemos que la masa A se mueve con velocidad $-v_0\hat{\imath}$ y como la cuerda es inextensible, esta se recoge a la misma tasa, o sea

- $\dot{\rho} = -v_0 \Rightarrow \ddot{\rho} = 0$ $\quad + 0.2$

mientras que el ángulo está dado por:

- $$\phi = \arccos\left(\frac{H}{\rho}\right) \Rightarrow \dot{\phi} = + \frac{1}{\sqrt{1 - H^2/\rho^2}} \frac{H}{\rho^2} \dot{\rho}$$
$$= -\frac{v_0 H}{\sqrt{\rho^4 - \rho^2 H^2}} \quad + 0.2$$

Por pitágoras sabemos que $x = H \Rightarrow \rho = \sqrt{2} H$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(\rho = \sqrt{2}H) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{H}$$

y como la rapidez en estas coordenadas está dada por

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2} \quad + 0.1$$

en $\rho = \sqrt{2}H$ sería

$$\|\vec{v}\|(\rho = \sqrt{2}H) = \sqrt{v_0^2 + 2H^2 \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{H^2}}$$
$$= \boxed{\sqrt{2}\, v_0} \quad + 0.3$$

b) Por la dirección de las fuerzas sobre B conviene pasar a las coord. cartesianas dibujadas. Los vectores $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}\}$ por trigonometría estarían dados por

$$\hat{\rho} = \sin\phi\, \hat{\imath} - \cos\phi\, \hat{\jmath} \quad \wedge \quad \hat{\phi} = \cos\phi\, \hat{\imath} + \sin\phi\, \hat{\jmath} \quad + 0.2$$

donde sabemos que $\cos\phi = H/\rho$ y $\sin\phi = x/\rho$, así que la vel. en cartesianas quedaría como

$$\vec{v} = -\frac{v_0 \rho}{x} \hat{\imath} \quad + 0.2$$

donde no tenemos componente en $\hat{\jmath}$ como es de esperar

Para la aceleración derivamos

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -v_0\left[-\frac{v_0}{x} + \frac{v_0 \rho^2}{x^3}\right]\hat{\imath}} \quad +0.3$$

b) Toca identificar las fuerzas sobre B

- Tensión: $\vec{T} = -T\sin\phi\,\hat{\imath} + T\cos\phi\,\hat{\jmath}$
- Normal: $\vec{N}_B = N_B\hat{\jmath}$
- Peso: $m\vec{g} = -mg\hat{\jmath}$

$+0.6$

así que la EoM vectorial sería

$$m\vec{a}_B = \sum_i \vec{F}_{iB}$$

$$\Leftrightarrow -mv_0\left[-\frac{v_0}{x} + \frac{v_0\rho^2}{x^3}\right]\hat{\imath} = -T\frac{x}{\rho}\hat{\imath} + T\frac{H}{\rho}\hat{\jmath} + N_B\hat{\jmath} - mg\hat{\jmath} \quad +0.3$$

$$\Rightarrow \hat{\imath})\ -mv_0\left[-\frac{v_0}{x} + \frac{v_0\rho^2}{x^3}\right] = -T\frac{x}{\rho}$$

$$\hat{\jmath})\quad 0 = T\frac{H}{\rho} + N_B - mg$$

$+0.2$

de donde podemos obtener T (en $x = H \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2}H$) usando $\hat{\imath})$ $+0.2$

$$\Rightarrow T(x=H) = mv_0^2\left[\frac{\sqrt{2}H}{H^2} - \frac{2\sqrt{2}H^3}{H^4}\right]$$

$$= \boxed{\frac{mv_0^2\sqrt{2}}{H}} \quad +0.3$$

c) Para obtener F usamos la EoM (en cartesianas) de A, donde $\vec{a}_A = \vec{0}$ al ser tirada con vel. cte.

$+0.5$

$$m\vec{a}_A = \sum_i \vec{F}_{iA}$$

$$\Leftrightarrow 0 = -F + T \quad +0.5$$

$$\Rightarrow F(x=H) = T(x=H) = \boxed{\frac{mv_0^2\sqrt{2}}{H}} \quad +0.5$$

d) Usamos la EoM de $\hat{\jmath})$ $+0.5$

$$\Rightarrow N = \underbrace{mg - T\frac{H}{\rho}}_{+0.5} \quad \Rightarrow N(x=H) = \boxed{mg - \frac{mv_0^2}{H}} \quad +0.5$$

Nota: Hay una segunda forma de resolver el problema, usando geometría para calcular la velocidad en $\hat{\imath}$.

Se tiene que el largo de la cuerda es L en total, por lo que tenemos la relación con el ρ definido antes

$$L = \rho + d \Rightarrow \rho = L - d \quad (*)$$

y por pitágoras sabemos que

$$\rho^2 = x^2 + H^2$$

$$\Leftrightarrow (L-d)^2 = x^2 + H^2 ,$$

tomando la derivada temporal a ambos lados

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(L-d)^2 = \frac{d}{dt}(x^2) + \cancel{\frac{d}{dt}(H^2)}^{=0}$$

$$\Leftrightarrow -2(L-d)\dot{d} = 2x\dot{x} \quad (1)$$

donde se usó que L y H son ctes. en el tiempo. Además, por $(*)$ sabemos que

$$\dot{\rho} = -\dot{d}$$

y ya argumentamos que $\dot{\rho} = -v_0 \Rightarrow \dot{d} = v_0$, reemplazando en (1) y usando que $L-d=\rho$

$$\Rightarrow -2\rho v_0 = 2x\dot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(x,\rho) = -\frac{\rho v_0}{x} \quad \therefore \ \vec{v} = -\frac{v_0 \rho}{x}\hat{\imath}$$

que es exactamente lo que obtuvimos antes.

Cualquiera de los dos métodos será considerado válido, siempre que esté bien argumentado.