Mecánica FI2001-3
Control 1: Miércoles 12 de abril, 2023

Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Francisco Colipi y Javier Huenupi
Ayudantes: Gabriel Marín y Valentina Suárez

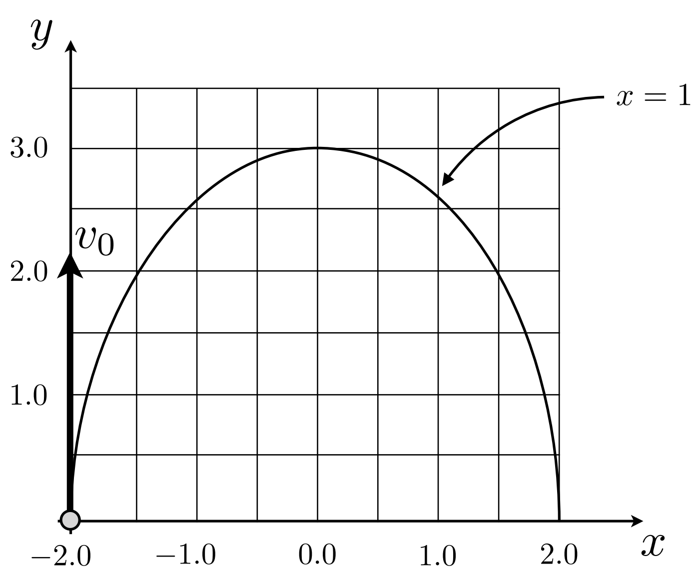
P1: Considere un tubo rígido con forma de una semi-elipse descrita por la ecuación $(y/3)^2 + (x/2)^2 = 1$ (ver figura). El tubo se encuentra fijo en un ambiente sin gravedad. Un anillo de masa m puede deslizar sin roce a lo largo del tubo. En el instante inicial el anillo se impulsa con rapidez v_0 desde uno de sus extremos ($x = -2$; $y = 0$). Para el instante cuando el anillo está pasando por el punto donde $x = 1$ determine:

(a) Componente del vector velocidad a lo largo del eje x.

(b) Componente del vector velocidad a lo largo del eje y.

(c) Magnitud de la fuerza que el tubo ejerce sobre el anillo.

(d) Componente de la aceleración a lo largo del eje x.



Indicación 1: Podría ser útil reconocer que el vector unitario que apunta desde (x, y) a $(x + dx, y + dy)$ puede ser escrito como $\hat{t} = (dx\hat{x} + dy\hat{y})/\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Indicación 2: El radio de curvatura ρ_c de una curva $y(x)$ en el plano cartesiano viene dado por

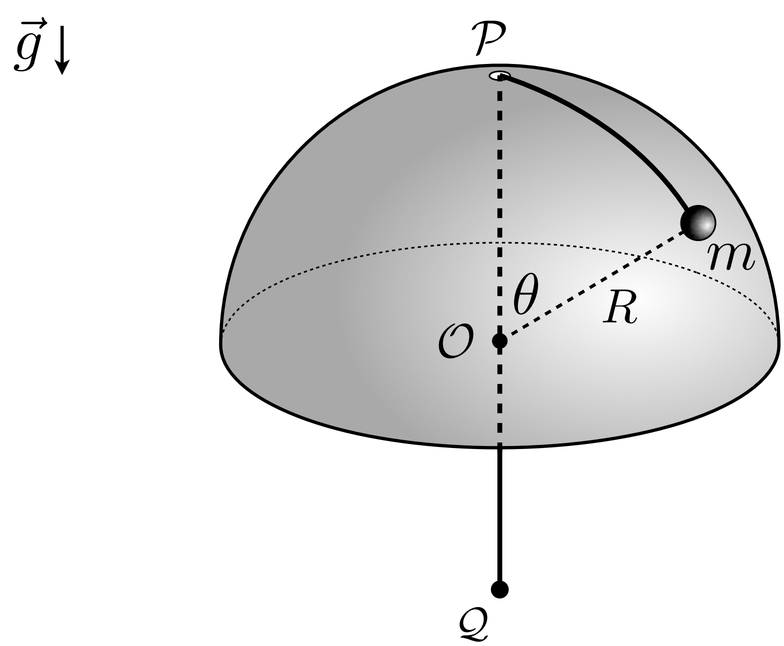
$$\rho_c(x) = \frac{1}{|y''|}\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}, \tag{1}$$

donde $y' = \frac{dy}{dx}$ y $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

P2: Una bolita de masa m se desliza sin roce sobre un cascarón semi-esférico hueco de radio R . La partícula se encuentra atada a una cuerda ideal que penetra hacia el interior del cascarón por su punto más alto $\mathcal{P}$, como muestra la figura.

(a) Si el extremo $\mathcal{Q}$ de la cuerda se mantiene fijo, tal que el ángulo zenital de la partícula se mantiene siempre en $\theta = \pi/3$, determine la máxima velocidad angular $\dot{\phi} = \omega_{\max}$ en torno al eje OP que puede tener la partícula, tal que ella no se separe del cascarón.

(b) Si en un segundo experimento la partícula tiene inicialmente $\theta = \pi/3$ y una velocidad angular $\dot{\phi}_0 = \omega_{\max}/3$ en torno a $\mathcal{OP}$ y el extremo $\mathcal{Q}$ de la cuerda es tirado hacia abajo con rapidez v_0 constante, encuentre una expresión para la fuerza normal que el cascarón ejerce sobre la partícula en función del ángulo θ.



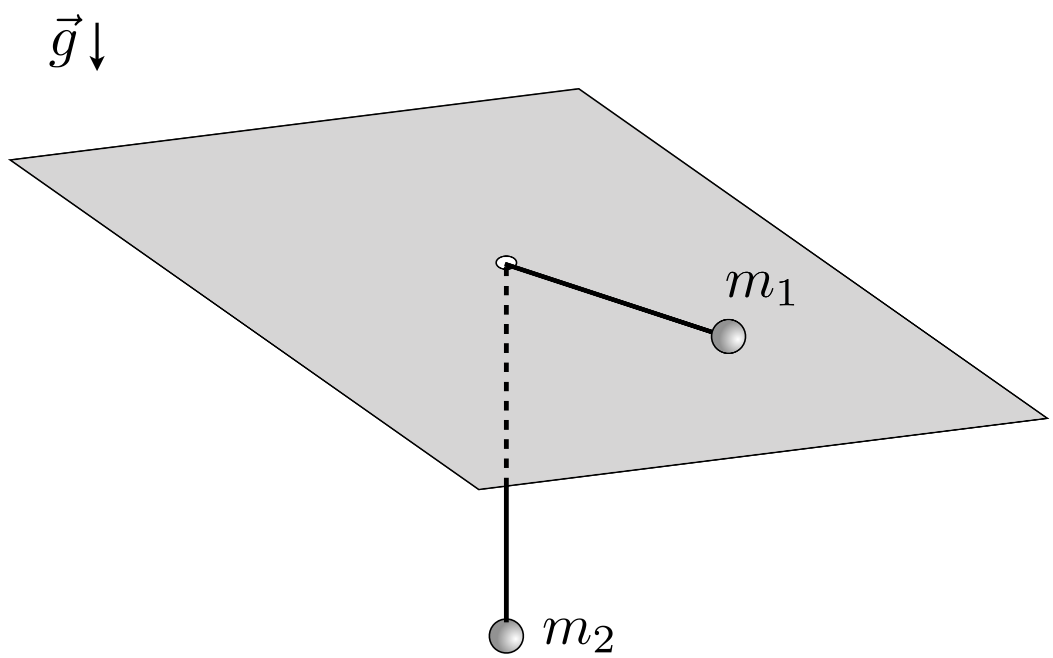
Recuerde: La velocidad y aceleración en coordenadas esféricas son

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi},$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right)\right]\hat{\phi}.$$

P3: Una masa puntual m_1 puede deslizar sin roce sobre un plano horizontal. La masa permanece unida a una segunda masa m_2 mediante una cuerda ideal de largo L, que pasa por un orificio pequeño (que coincide con el origen) permitiendo que m_2 cuelgue verticalmente (ver figura). En $t = 0$ la posición y velocidad de m_1, en coordenadas cilíndricas, vienen dadas por $\vec{r}(t = 0) = R_0\hat{\rho}$ y $\vec{v}(t = 0) = v_0\hat{\phi}$ con $\phi = 0$.

(a) Identifique las fuerzas que actúan sobre cada masa. A partir de la Segunda Ley de Newton, determine todas las ecuaciones escalares que describen el movimiento de las masas.
(b) Encuentre una expresión para $\dot{\phi}$ en término de la coordenada ρ y las cantidades R_0 y v_0.
(c) Determine la ecuación de movimiento satisfecha por ρ. ¿Cuál debe ser el valor de R_0 para que el movimiento resultante sea circular uniforme?
(d) Encuentre una expresión para la tensión de la cuerda en términos de ρ. Esta expresión también puede depender de otras cantidades como R_0, v_0, m_1, m_2, g y L.



Recuerde: La velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas son

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}, \qquad \vec{a} = \left[\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right]\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\right]\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}.$$

Solución P1: $y = 3\sqrt{1-x^2/4}$, $y' = -\frac{3x}{2\sqrt{4-x^2}}$ y $y'' = -\frac{6}{(4-x^2)^{3/2}}$. El vector tangente al tubo es $\hat{t} = \frac{\hat{x}+y'\hat{y}}{\sqrt{1+(y')^2}}$. Luego $\hat{n} = \frac{y'\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{1+(y')^2}}$. Sabemos que $\vec{v} = v\hat{t}$ y $\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n}$. El tubo ejerce una fuerza normal. Sigue que $\dot{v} = 0$. Luego $\vec{v} = v_0\hat{t}$ y $\vec{a} = \frac{v_0^2}{\rho_c}\hat{n}$ donde v_0 es el valor inicial. Sigue que $v_x = \frac{v_0}{\sqrt{1+(y')^2}}$ y $v_y = \frac{v_0 y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$. Evaluando: $v_x = \frac{2v_0\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16+5x^2}}$ y $v_y = -\frac{3v_0 x}{\sqrt{16+5x^2}}$. Con $x=1$: $v_x = \frac{2v_0\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$ y $v_y = -\frac{3v_0}{\sqrt{21}}$. Sabemos que $\rho_c = \frac{1}{y''}\left[1+(y')^2\right]^{3/2}$. Luego $\rho_c(x) = \frac{1}{48}(16+5x^2)^{3/2}$. Evaluando $F = m\frac{v_0^2}{\rho_c} = m\frac{48v_0^2}{(16+5x^2)^{3/2}}$. Con $x=1$: $F = m\frac{48v_0^2}{(21)^{3/2}}$. Finalmente $a_x = -\frac{48v_0^2}{(16+5x^2)^{3/2}}\frac{3x}{\sqrt{16+5x^2}} = -\frac{144v_0^2 x}{(16+5x^2)^2}$. Con $x=1$: $a_x = -\frac{16v_0^2}{49}$.

Solución P2: Con r constante se tiene $\vec{a} = -R(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{r} + R(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\theta} + \frac{R}{\sin\theta}\left[\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\dot{\phi}\right)\right]\hat{\phi}$. La fuerza total sobre m es $\vec{F}_{\text{tot}} = N\hat{r} - T\hat{\theta} - mg(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta})$. (a) Aquí $\theta = \pi/3$. Luego $\dot{\theta} = 0$, $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ y $\cos\theta = 1/2$. Además $\vec{a} = -\frac{3R}{4}\dot{\phi}^2\hat{r} - \frac{\sqrt{3}R}{4}\dot{\phi}^2\hat{\theta} + \frac{\sqrt{3}R}{2}\ddot{\phi}\hat{\phi}$. Usando la segunda ley $-m\frac{3R}{4}\dot{\phi}^2\hat{r} - \frac{\sqrt{3}R}{4}m\dot{\phi}^2\hat{\theta} + m\frac{\sqrt{3}R}{2}\ddot{\phi}\hat{\phi} = N\hat{r} - T\hat{\theta} - mg(\frac{1}{2}\hat{r} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\theta})$. Se deduce que $\ddot{\phi} = 0$ de donde $\dot{\phi} = \omega$ es constante. Quedan las ecuaciones escalares:

$$-m\frac{3R}{4}\omega^2 = N - mg\frac{1}{2}, \qquad -\frac{\sqrt{3}R}{4}m\omega^2 = -T + mg\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{2}$$

$\omega_{\max}$ se encuentra con la condición $N = 0$. Se obtiene $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$. (b) En este caso se nos informa que $\dot{\theta} = -v_0/R$ constante. Luego $\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{v_0}{R}t$ y $\ddot{\theta} = 0$. Usando la segunda ley $-mR((\frac{v_0}{R})^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{r} - mR\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2\hat{\theta} + m\frac{R}{\sin\theta}\left[\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\dot{\phi}\right)\right]\hat{\phi} = N\hat{r} - T\hat{\theta} - mg(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta})$. De la componente $\hat{\phi}$ se deduce $\dot{\phi} = C/\sin^2\theta$ donde C es una constante. Las condiciones iniciales implican $C = \frac{1}{4}\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{24R}}$. A partir de la componente $\hat{r}$ de la segunda ley sigue que $N = -mR((\frac{v_0}{R})^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) + mg\cos\theta$. Reemplazando $\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{24R}}/\sin^2\theta$ finalmente encontramos $N(\theta) = m\left[g\cos\theta - \frac{v_0^2}{R} - \frac{g}{24\sin^2\theta}\right]$.

Solución P3: (a) Las posiciones son $\vec{r}_1 = \rho\hat{\rho}$ y $\vec{r}_2 = z\hat{k}$ (con $z < 0$). Se tiene $\rho - z = L$. Luego $\vec{r}_2 = (\rho - L)\hat{k}$. Las aceleraciones son: $\vec{a}_1 = \left[\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right]\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\right]\hat{\phi}$ y $\vec{a}_2 = \ddot{\rho}\hat{k}$. Las fuerzas totales sobre m_1 y m_2 son $\vec{F}_1 = -T\hat{\rho} - m_1 g\hat{k} + N\hat{k}$ y $\vec{F}_2 = T\hat{k} - m_2 g\hat{k}$. Luego, la segunda ley implica: $m_1(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + m_1(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} = -T\hat{\rho} - m_1 g\hat{k} + N\hat{k}$ y $m_2\ddot{\rho}\hat{k} = T\hat{k} - m_2 g\hat{k}$. Las ecuaciones escalares son:

$$m_1(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -T, \qquad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0, \qquad N = m_1 g, \qquad m_2\ddot{\rho} = T - m_2 g.$$

(b) La segunda ecuación implica $\dot{\phi} = C/\rho^2$ donde C es una constante de integración. Las condiciones iniciales requieren que $C = v_0 R_0$. Sumando la primera y cuarta ecuación $(m_1 + m_2)\ddot{\rho} - m_1\rho\dot{\phi}^2 + m_2 g = 0$. Reemplazando $\dot{\phi} = v_0 R_0/\rho^2$ se obtiene $\ddot{\rho} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{v_0^2 R_0^2}{\rho^3} + \frac{g m_2}{m_1+m_2} = 0$. (c) En el caso de un movimiento circular uniforme se tiene $R_0 = \frac{v_0^2 m_1}{g m_2}$. (d) Despejando la tensión como función de ρ: $T(\rho) = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(g + \frac{v_0^2 R_0^2}{\rho^3}\right)$.