

P1 Una partícula de masa m se mueve en un plano bajo dos fuerzas, una central $\vec{f}_c = f(r)\hat{r}$ y una viscosa $\vec{f}_v = -c\vec{v}$.

(a) Determine lo siguiente:

(i) Las ecuaciones de movimiento en coordenadas polares.

(ii) La cantidad $J = \|\vec{r} \times \vec{v}\|$ de la partícula en el mencionado sistema de coordenadas.

(b) Considerando ahora que inicialmente la partícula tiene $J(t=0) = J_0$, determine la cantidad $J(t)$ para todos los tiempos posteriores.

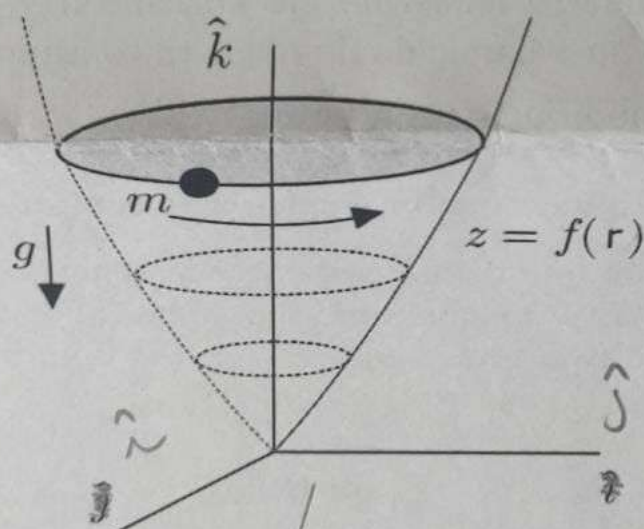
P2 Considere un cilindro hueco de eje horizontal y radio R . En el punto más bajo de su interior una partícula de masa m es impulsada inicialmente con rapidez $v_0 = \sqrt{\frac{7}{2}gR}$ como muestra la figura.

(a) Determine el ángulo θ en que la partícula se separa del cilindro.

(b) Determine el tiempo que transcurre entre la separación de la partícula y el instante en que su altura es máxima (suponga que después de la separación la partícula no vuelve a tomar contacto con el cilindro).

P3 Una bolita de masa m se desliza sin roce por el interior de una copa. La superficie de la copa está descrita por la función $z = f(r)$, donde z y r son coordenadas cilíndricas y el eje vertical \hat{k} es el eje de revolución de la copa (ver figura). Se observa que la bolita se mueve describiendo un círculo y manteniendo constante su altura.

- Dibuje el DCL de la bolita. [0.5 pt]
- Escriba las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas. [2 pt]
- Determine la velocidad angular ω de la bolita en términos de dz/dr , el radio del círculo y otras constantes del problema. [2 pt]
- Considere los casos de una copa de martini ($z_m=r$) y en una de vino ($z_v = H(r/R)^2$). Determine la velocidad angular ω en cada caso. [1 pt]
- Si la altura de la bolita en ambas copas es la misma, señale en cuál de ellas la bolita tiene una mayor velocidad angular o si esto depende de alguna condición de los parámetros. [0.5 pt]



P1

Control 1

(a) (i) En cilíndricas con $z=0$ tendríamos la ec.

$$m((\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}) = f(r)\hat{\rho} - c(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta})$$

Por lo que nuestras ecs. de movimiento escalares serían

$$\hat{\rho}) \quad m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = f(r) - c\dot{\rho}$$

$$\hat{\theta}) \quad m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = -c\rho\dot{\theta}$$

(ii) Hacemos el producto cruz

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{v} &= \rho\hat{\rho} \times (\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}) = \rho\dot{\rho} \cancel{\hat{\rho} \times \hat{\rho}} + \rho^2\dot{\theta} \hat{\rho} \times \hat{\theta} \\ &= \rho^2\dot{\theta}\hat{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J = \|\vec{r} \times \vec{v}\| = \|\rho^2\dot{\theta}\hat{k}\| = \rho^2\dot{\theta}$$

(b) De $\hat{\theta}$ tenemos que podemos reescribir la como (estamos buscando una ec. de mov. para J)

$$\frac{m}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = -c\rho\dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = -\frac{c}{m}\rho^2\dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(J)}{dt} = -\frac{c}{m}J$$

$$\Rightarrow \int_{J_0}^J \frac{dJ}{J} = -\frac{c}{m} \int_0^t dt$$

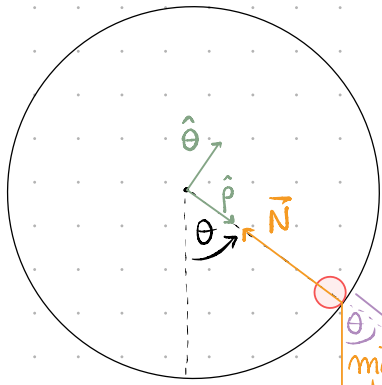
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{J}{J_0}\right) = -\frac{c}{m}t \Leftrightarrow J(t) = J_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$

Donde vemos que J, el momento angular, decrece exponencialmente con el tiempo (haciéndose 0 en $t \rightarrow \infty$) debido a la fuerza de roce que le quita energía al sistema.

Notamos que este decaimiento es independiente de $f(r)$, ya que esta es una fuerza central (apunta en la dirección de $\hat{\rho}$), por lo tanto conservativa.

P2

Usamos coord. polares centradas en el centro del cilindro. Las fuerzas aplicadas sobre la partícula son



□ Normal: $\vec{N} = -N\hat{p}$

□ Gravedad: $m\vec{g} = mg\cos\theta\hat{p} - mg\sin\theta\hat{\theta}$

La ec. de movimiento vectorial sería

$$m((\ddot{p} - p\dot{\theta}^2)\hat{p} + (2\dot{p}\dot{\theta} + p\ddot{\theta})\hat{\theta}) = -N\hat{p} + mg\cos\theta\hat{p} - mg\sin\theta\hat{\theta}$$

Considerando $p=R$, $\dot{p}=\ddot{p}=0$, las ecs. mov. escalares serían

\hat{p}) $-mR\dot{\theta}^2 = -N + mg\cos\theta$

$\hat{\theta}$) $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \Rightarrow mR\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -mg\sin\theta$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} = -\frac{g}{R} \int_0^{\theta} \sin\theta d\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = \frac{g}{R} (\cos\theta - 1)$$

donde para un mov. circular $\vec{v} = \dot{p}\hat{p} + R\dot{\theta}\hat{\theta} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$ e inicialmente $\vec{v}_0 = v_0\hat{\theta}$

$$\Rightarrow R\dot{\theta}_0 = v_0 \Leftrightarrow \dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{R}(\cos\theta - 1) + \frac{v_0^2}{R^2} = 2\frac{g}{R}(\cos\theta - 1) + \frac{7}{2}gR\frac{1}{R^2} = 2\frac{g}{R}\cos\theta + \frac{3}{2}\frac{g}{R}$$

reemplazando en \hat{p} .)

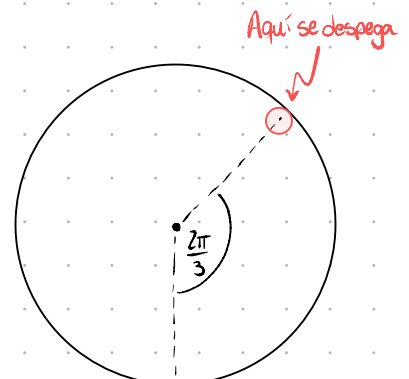
$$\Rightarrow -mR\left(2\frac{g}{R}\cos\theta + \frac{3}{2}\frac{g}{R}\right) = -N + mg\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow N(\theta) = 3mg\cos\theta + \frac{3}{2}mg$$

Para que se separe la partícula necesitamos imponer $N(\theta^*) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow 3mg\cos\theta^* + \frac{3}{2}mg \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta^* = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta^* = \frac{2\pi}{3} \quad (= 120^\circ)$$



(b) Ahora, después de despegarse, la partícula solo está bajo efecto de la gravedad, por lo que cambia la dinámica. Utilizemos cartesianas

$$m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}) = -mg\hat{j}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}_0 - gt$$

Y alcanza su altura máx. cuando $\dot{y}(t^{**}) = 0 \Rightarrow t^{**} = \frac{\dot{y}_0}{g}$

Para calcular la velocidad inicial en \hat{j} utilizemos que encontramos

$$\ddot{\theta}(\theta) = 2\frac{g}{R}\cos\theta + \frac{3}{2}\frac{g}{R}$$

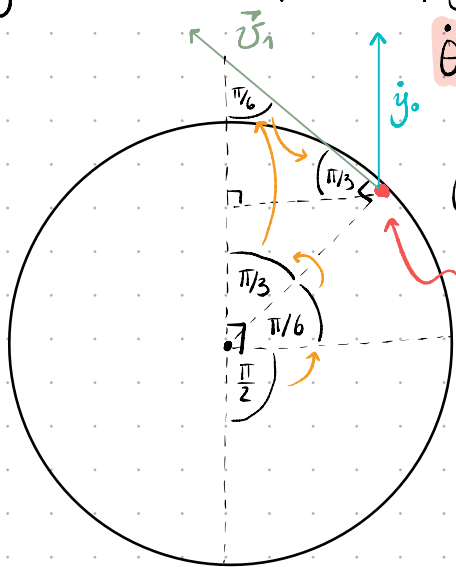
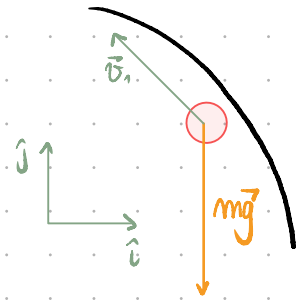
y en el momento que se despega solo tiene velocidad tangencial (en $\hat{\theta}$), evaluemos

$$\dot{\theta}(\theta = 2\pi/3) = \sqrt{\frac{2g}{R} \cdot \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}\frac{g}{R}} = \sqrt{-\frac{g}{R} + \frac{3}{2}\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

Con un poco de geometría encontramos que

$$\dot{y}_0 = v_0 \sin \pi/3, \text{ con } v_0 = R\dot{\theta}(2\pi/3)$$

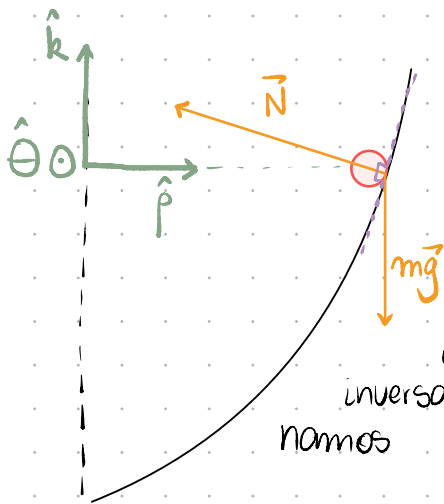
$$= R \sqrt{\frac{g}{2R}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t^{**} = \sqrt{\frac{3R}{8g}}$$



Posición donde se despega

* Las flechas indican el orden en el que se definieron los ángulos

P3



(b) Tenemos solo dos fuerzas actuando sobre la partícula

▫ Gravedad: $m\vec{g} = -mg\hat{k}$

▫ Normal: $\vec{N} = N_p\hat{p} + N_z\hat{k}$

Nos dicen que la altura es cte. $z=h \Rightarrow \dot{z}=\ddot{z}=0$, además como tenemos que $z=f(p) \Rightarrow p=f^{-1}(z)$ con f^{-1} la función inversa de f , por lo que si z es constante $\Rightarrow f^{-1}(z)$ es cte., así que definimos

$$p_0 \equiv f^{-1}(h) \Rightarrow \dot{p} = \ddot{p} = 0$$

Escribamos la ec. de mov. vectorial

$$m(\ddot{p} - p\dot{\theta}^2)\hat{p} + \frac{1}{f} \frac{d}{dt}(p^2\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k} = -mg\hat{k} + N_p\hat{p} + N_z\hat{k}$$

$$\Rightarrow m(-p_0\dot{\theta}^2\hat{p} + \frac{1}{f_0} \frac{d}{dt}(p_0^2\dot{\theta})\hat{\theta}) = -mg\hat{k} + N_p\hat{p} + N_z\hat{k}$$

Y en su forma escalar

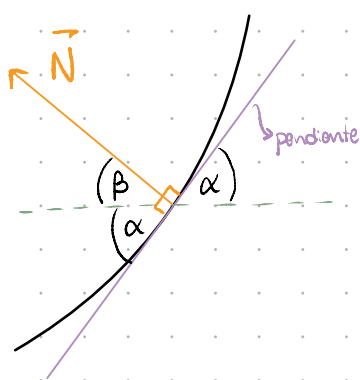
$$\hat{p}) -mp_0\dot{\theta}^2 = N_p$$

$$\hat{\theta}) \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0, \text{ velocidad angular cte.}$$

$$\hat{k}) 0 = -mg + N_z$$

(c) La velocidad angular la tendríamos de $\hat{p})$ si tuviésemos N_p . Esta normal está estrechamente relacionada a N_z , ya que ambas vienen de \vec{N} .

Recordando que la normal es perpendicular a la superficie, en particular es perpendicular a la tangente a la superficie en el punto en el que se encuentra la partícula. La tangente en su forma infinitesimal está dada por la derivada df/dr .



Además tenemos que $\tan \alpha = \frac{df}{dr}$ y que $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{df}{dr}$$

Y tenemos que descomponiendo \vec{N} en \hat{p} y \hat{k}

▸ $N_p = -N \cos \beta$

▸ $N_z = N \sin \beta$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan \beta} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{-N_p/N}{N_z/N} = \frac{-N_p}{N_z} = \frac{df}{dr} \Leftrightarrow N_p = -N_z \cdot \frac{df}{dr} = -N_z \frac{dz}{dr}$$

y por \hat{k} tenemos que $N_z = mg \Rightarrow N_r = -mg \frac{dz}{dr}$. Ahora sí, reemplazando en \hat{p}

$$-mp \cdot \dot{\theta}^2 = -mg \frac{dz}{dr}$$
$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g}{p} \frac{dz}{dr} \Rightarrow \omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{p} \frac{dz}{dr}}, \text{ con } p_0 = p_0(h) \text{ conocido}$$

(d) Simplemente reemplazamos

Martini $z=r$: $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$, donde h es la altura de la partícula

Vino $z=H(r/R)^2$: $\omega = \sqrt{\frac{g}{R\sqrt{h/H}} \cdot \frac{2H}{R^2} \cdot R\sqrt{\frac{h}{H}}} = \sqrt{\frac{2gH}{R^2}}$

(e) Depende de la forma de los copos, ya que si H es muy grande y R muy pequeño ($H/R \gg 1$) se tiene que $\omega_v \gg \omega_m$. Además, ω_v es independiente de la altura de la partícula h , por lo que si posicionamos a la partícula en una posición muy alta $\omega_m \ll \omega_v$.