MECÁNICA (FI 2001-2) **CONTROL 1** Fecha: 06 abril 2022

Prof. Patricio Aceituno

Profesores auxiliares: Edgardo Rosas, Javier Huenupi; Ayudantes: Felipe Cubillos, Álvaro Flores

Problema 1. Considere un tubo de forma circular de radio R que se encuentra rotando con velocidad angular constante ω_o respecto de un eje vertical que pasa por el centro del círculo. Por el interior del tubo se puede desplazar sin roce una partícula de masa **m**. Inicialmente la partícula está en reposo en el punto más alto del tubo. En algún momento una pequeña perturbación la hace caer por su interior.

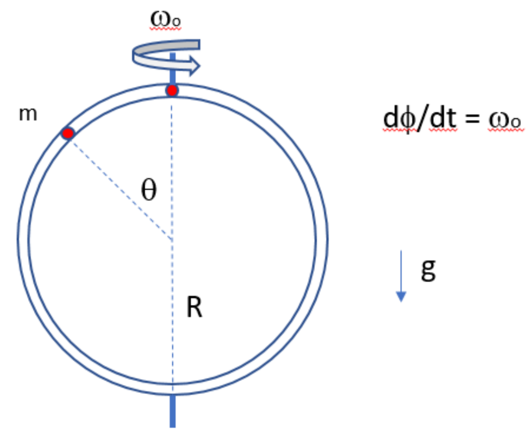
Para el momento cuando la partícula se haya desplazado un cuarto de círculo por el interior del tubo ($\theta = \pi/2$), determine:

a) Velocidad angular $d\theta/dt$ de la partícula (1.5 pts)

b) Velocidad absoluta de la partícula en ese instante (1.5 pts.)

c) Componente radial de la fuerza que la pared del tubo ejerce sobre la partícula (N_r) (1.5 pts)

d) Componente en dirección perpendicular al plano definido por el tubo, de la fuerza que la pared del tubo ejerce sobre la partícula (N_ϕ). (1.5 pts)



Problema 2. El sistema tubular mostrado en la figura gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular de magnitud constante ω_o. Un pequeño cilindro P de masa **m** se puede mover sin roce dentro del tubo horizontal. El cilindro está sujeto por una cuerda que pasa por una pequeña polea y sale por la parte inferior del conjunto. El extremo de la cuerda es traccionado de una forma tal que se mueve con rapidez constante $\mathbf{v_o}$ hacia abajo.

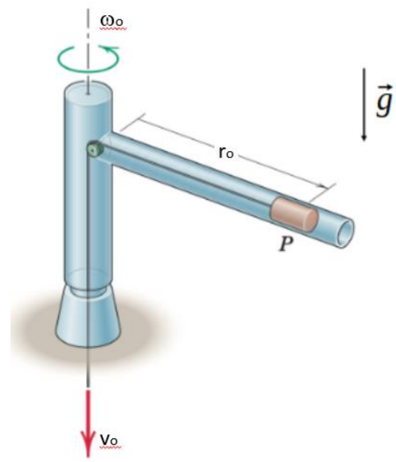
Considere que en t = 0, el cilindro P se encuentra a una distancia $\mathbf{r_0}$ de la polea.

a) Determine la aceleración del cilindro en función del tiempo (2 ptos).

<u>Para el instante</u> en que la distancia entre el cilindro y la polea ha disminuido a la mitad, determine:

b) magnitud de la fuerza de contacto que el tubo ejerce sobre el cilindro (2 puntos)

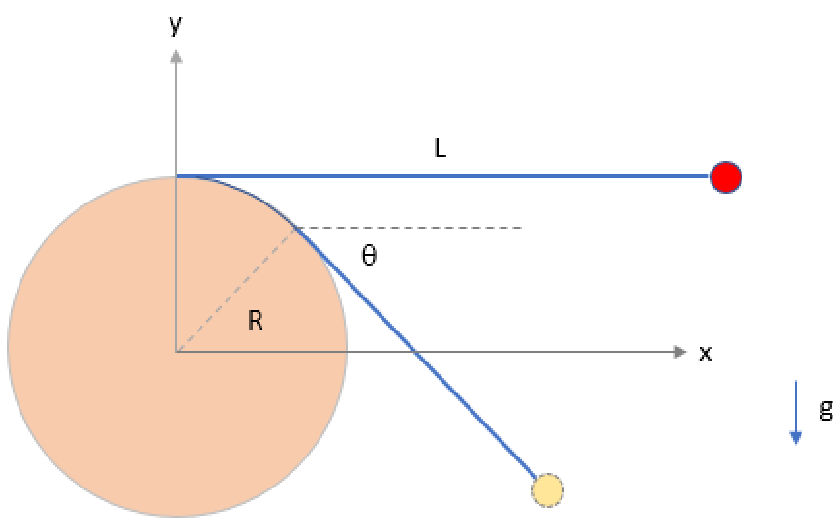
c) tensión de la cuerda (2 puntos)



Problema 3. Considere un cilindro de radio **R** y una cuerda ideal de largo **L** ($L > \pi R$) con uno de sus extremos fijo a un punto en la parte más alta del cilindro. La cuerda se encuentra extendida y en posición horizontal, unida en el otro extremo a una partícula. En un cierto instante se suelta la partícula desde esa posición cayendo por efecto de la gravedad, siempre atada a la cuerda, de modo que ésta forma un ángulo θ con la dirección horizontal (ver figura), a medida que se enrolla en el cilindro.

a) Utilizando como referencia el sistema cartesiano ortogonal (x,y) indicado en la figura, con el eje x en la dirección horizontal y el eje y en la dirección vertical, determine el vector posición de la partícula en función del ángulo θ y de los otros parámetros del problema (R y L) (3 pts)

b) Determine la rapidez de la partícula en esa posición en función de θ, $d\theta/dt$ y de los parámetros R y L. (3 pts)



Control 1

P1

a) Debido al movimiento usamos coord. esféricas (con $r=R$, constante).
Identificamos las fuerzas,

$\hat{r}$) Componente radial de la fuerza de la pared
$\hat{\phi}$) " azimutal " "
$\hat{k}$) Gravedad

Sabemos que el peso es de la forma $-mg\hat{k} = -mg(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})$.
Usamos segunda Ley de Newton

$$m\vec{a} = m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\phi}\right)$$

$$= N_r\hat{r} + N_\phi\hat{\phi} - mg\cos\theta\,\hat{r} + mg\sin\theta\,\hat{\theta} \quad (1) \qquad (+0.5 \text{ pts})$$

donde $\dot{\phi} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$, $r = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$, reemplazamos esto y formamos nuestras ecs. escalares.

$$\hat{r})\ -m(R\dot{\theta}^2 + R\omega_0^2\sin^2\theta) = N_r - mg\cos\theta \quad (2)$$

$$\hat{\theta})\ m(R\ddot{\theta} - R\omega_0^2\sin\theta\cos\theta) = mg\sin\theta \quad (3) \qquad (+0.3 \text{ pts})$$

$$\hat{\phi})\ 2mR\omega_0\dot{\theta}\cos\theta = N_\phi \quad (4)$$

Notamos que podemos conseguir $\dot{\theta}$ de (3) con trucazo de mecánica

$$(3) \rightarrow mR\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = mg\sin\theta + mR\omega_0^2\sin\theta\cos\theta \quad \Big/ \int_0^\theta d\theta$$

$$\Rightarrow mR\int_0^{\dot{\theta}}\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = mg\int_0^\theta \sin\theta\,d\theta + mR\omega_0^2\int_0^\theta \sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{mR}{2}\dot{\theta}^2 = -mg(\cos\theta - 1) - \frac{mR\omega_0^2}{2}(\cos^2\theta - 1)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(\theta) = \sqrt{-\frac{2g}{R}(\cos\theta - 1) - \omega_0^2(\cos^2\theta - 1)} \quad (5)$$

} tomamos el + porque cae en $+\hat{\theta}$

donde consideramos que por la pequeña perturbación $\dot{\theta}(t=0) = 0$. Evaluamos en $\pi/2$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(\theta = \pi/2) = \sqrt{\frac{2g}{R} + \omega_0^2} \qquad (+0.7 \text{ pts})$$

b) Calculamos la velocidad como:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\phi}$$

$$= R\sqrt{-\frac{2g}{R}(\cos\theta - 1) - \omega_0^2(\cos^2\theta - 1)}\,\hat{\theta} + R\omega_0\sin\theta\,\hat{\phi}$$

Evaluando $\theta = \pi/2$

$$\Rightarrow \vec{v}(\theta=\pi/2) = R\sqrt{\frac{2g}{R}+\omega_0^2}\,\hat{\theta} + R\omega_0\,\hat{\phi} \quad (+1.5 \text{ pts})$$

* Nota: En verdad se pedía la rapidez, pero no se dejó claro, así que se toma como bueno haber llegado únicamente a la velocidad $\vec{v}(\theta=\pi/2)$

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta}\text{, reemplazamos}$$

$$\Rightarrow v(\theta) = \sqrt{R^2\left(-\frac{2g}{R}(\cos\theta-1) - \omega_0^2(\cos^2\theta-1)\right) + R^2\omega_0^2\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow v(\theta=\pi/2) = \sqrt{R^2\left(\frac{2g}{R}+\omega_0^2\right)+R^2\omega_0^2} = \sqrt{2gR + 2R^2\omega_0^2}$$

esto se quería

c) Para encontrar $N_r(\theta=\pi/2)$ usamos (2) donde ya conocemos la expresión de $\dot{\theta}(\theta)$, (5).

$$(2) \rightarrow N_r = mg\cos\theta - mR\left(-\frac{2g}{R}(\cos\theta-1) - \omega_0^2(\cos^2\theta-1)\right) - mR\,\omega_0^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow N_r(\theta=\pi/2) = -mR\left(\frac{2g}{R}+\omega_0^2\right) - mR\omega_0^2 = -2mg - 2mR\omega_0^2 \quad (+1.5 \text{ pts})$$

d) Usamos (4)

$$N_\phi = 2mR\omega_0\sqrt{-\frac{2g}{R}(\cos\theta-1) - \omega_0^2(\cos^2\theta-1)}\,\cos\theta$$

$$\Rightarrow N_\phi(\theta=\pi/2) = 0 \quad (+1.5 \text{ pts})$$

P2

a) Usamos coord. cilíndricas. Identificamos las fuerzas

$\hat{\rho}$) Tensión de la cuerda
$\hat{\phi}$) Normal de la pared en la dirección azimutal
$\hat{k}$) Gravedad y normal de la pared en $\hat{k}$ (se cancelan)

Usamos 2^da Ley de Newton

Para la parte b)

$$m\vec{a} = m\left(\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi}\right) = -T\hat{\rho} + N_\phi\hat{\phi} \quad (1) \quad (+1.0 \text{ pts})$$

Por enunciado sabemos que $\dot{\rho} = -v_0 \Rightarrow \ddot{\rho} = 0$, $\dot{\phi} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$, reemplazamos y formamos nuestras ecs. escalares

$$\hat{\rho})\ -m\rho\omega_0^2 = -T \quad (2)$$

$$\hat{\phi})\ -2mv_0\omega_0 = N_\phi \quad (3)$$

Para conseguir $\rho(t)$ integramos $\dot{\rho}$,

$$\frac{d\rho}{dt} = -v_0 \Big/ \int_0^t dt \Rightarrow \int_{r_0}^{\rho} d\rho = -v_0\int_0^t dt \Leftrightarrow \rho(t) = r_0 - v_0 t \quad (+1.0 \text{ pts})$$

Así que la aceleración en función del tiempo es:

$$\vec{a}(t) = -(r_0 - v_0 t)\,\omega_0^2\,\hat{\rho} - 2v_0\omega_0\,\hat{\phi} \quad (+1.0 \text{ pts})$$

b) De (3) tenemos que la fuerza que ejerce el tubo es constante

$$\vec{N} = N_\phi\hat{\phi} + N_k\hat{k} = -2mv_0\omega_0 + mg \quad (+0.6 \text{ pts } (0.3 \text{ cada normal}))$$

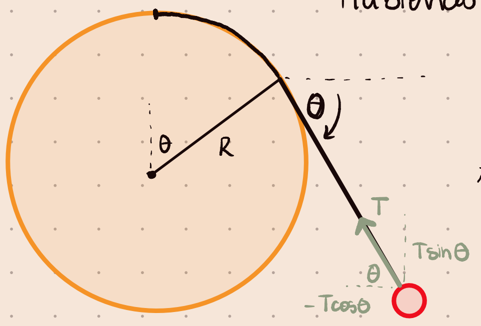
$$\Rightarrow N = \|\vec{N}\| = m\sqrt{4v_0^2\omega_0^2 + g^2} \quad (+0.4 \text{ pts}) \quad (-0.2 \text{ si no consideró alguna normal})$$

c) Para la tensión usamos (2) con $\rho = r_0/2$

$$\Rightarrow T(\rho = r_0/2) = \frac{mr_0}{2}\omega_0^2 \quad (+2.0 \text{ pts}) \quad (-0.5 \text{ si no evaluó } \rho = l_0/2)$$

P3

a) Las fuerzas actuando sobre la partícula son la tensión y el peso. Habiendo descompuesto la tensión en $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ hacemos 2da Ley de Newton

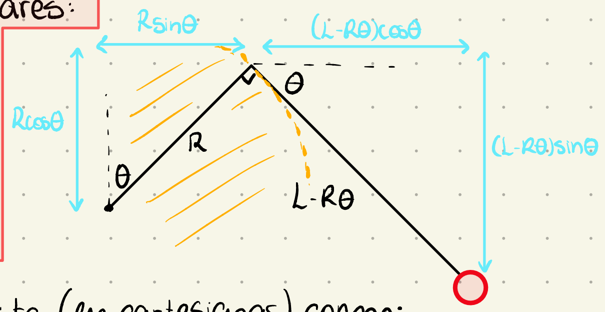


$$m\vec{a} = m(\ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath}) = -mg\hat{\jmath} + T\sin\theta\hat{\jmath} - T\cos\theta\hat{\imath} \quad (1)$$

Armamos nuestras ecs. escalares:

$\hat{\imath})\ m\ddot{x} = -T\cos\theta$

$\hat{\jmath})\ m\ddot{y} = -mg + T\sin\theta$



Por el dibujo de la derecha tenemos que la posición está descrita (en cartesianas) como:

$$\vec{r} = (R\sin\theta + (L-R\theta)\cos\theta)\hat{\imath} + (R\cos\theta - (L-R\theta)\sin\theta)\hat{\jmath} \quad (2) \quad (+3.0\text{ pts})$$

b) Para la rapidez primero calculamos la velocidad, derivamos (2)

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (R\cos\theta\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta - (L-R\theta)\sin\theta\dot{\theta})\hat{\imath} + (-R\sin\theta\dot{\theta} + R\dot{\theta}\sin\theta - (L-R\theta)\cos\theta\dot{\theta})\hat{\jmath},$$

así que la rapidez es

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{(\cancel{R\cos\theta\dot{\theta}} - \cancel{R\dot{\theta}\cos\theta} - (L-R\theta)\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\cancel{-R\sin\theta\dot{\theta}} + \cancel{R\dot{\theta}\sin\theta} - (L-R\theta)\cos\theta\dot{\theta})^2}$$

$$= \sqrt{(L-R\theta)^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + (L-R\theta)^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2} = (L-R\theta)\dot{\theta}$$

y esto tan simple?? (+3.0 pts)

* Nota: La parte en roja no se considera (este es un problema de cinemática)

▷ Notas sobre el puntaje ($\forall P_i, i \in \{1,2,3\}$):

- Se bonifica con +0.1 pts si se llegó al resultado lo más desarrollado posible (queda en su expresión más corta y simple)

- Se penaliza con −0.2 pts si no se evaluó cuando se debía o se evaluó mal. Entiéndase evaluar como reemplazar con $\rho = 6/2$, e.g., en la expresión de la tensión