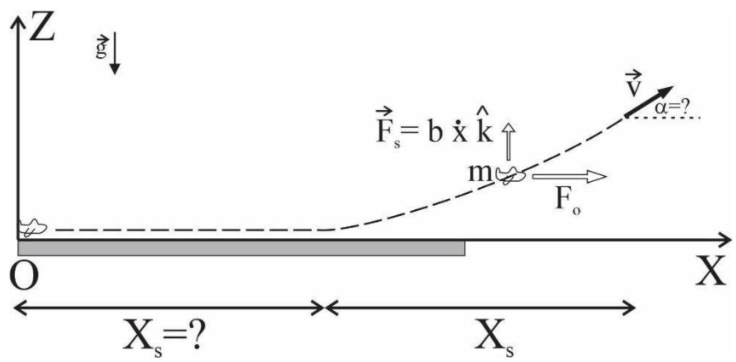
Pauta Control 1

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.- Se modela el despegue de un avión de manera simplificada como una partícula de masa m sujeta a una fuerza propulsora de magnitud contante F_0 y dirección siempre horizontal. El avión puede volar gracias a una fuerza aerodinámica de sustentación, $\vec{F}_S$, que se supone siempre vertical y de magnitud proporcional a la componente horizontal de la velocidad del avión (constante de proporcionalidad b conocida). Despreciaremos todo roce.

(a) Si el avión parte desde el reposo en el extremo O de la pista, determine la distancia recorrida, X_S, hasta que se separa de ella.

(b) Determine el ángulo α que el vector velocidad del avión tiene con la dirección horizontal cuando se encuentra a una distancia horizontal $2X_S$ del punto O.



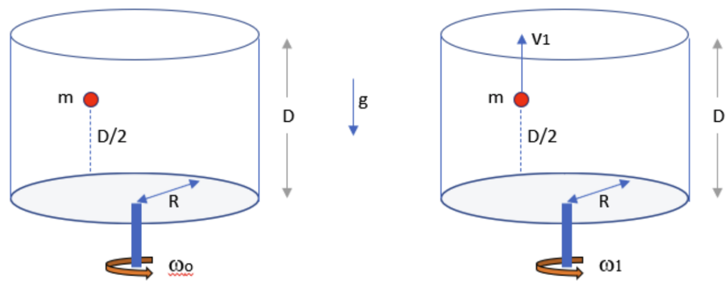
P2.- Un recipiente cilíndrico de radio R y altura D gira con velocidad angular constante alrededor de un eje vertical que pasa por su centro, mediante un vástago soldado en su base (ver figura adjunta). Se constata que una partícula de masa m, colocada a una altura $D/2$ sobre la base del recipiente junto a la pared interna del mismo, se mantiene en esa posición, rotando en forma solidaria con él, si la velocidad angular de rotación es igual o superior a ω_0.

(a) Determine el valor del coeficiente de roce estático μ_e en función de parámetros conocidos del problema, incluyendo la magnitud de la aceleración de gravedad (g).

Suponga ahora que el recipiente gira a una velocidad angular $\omega_1 < \omega_0$ y que entre la partícula y la pared interna del recipiente existe un coeficiente de roce cinético de valor μ_c. Rotando la partícula en forma solidaria con el recipiente, en la misma posición inicial de (a), se le da una componente vertical de velocidad (v_1 por determinar) hacia arriba.

(b) Determine la magnitud de la componente vertical de la velocidad con que se impulsa la partícula hacia arriba (v_1) tal que la partícula llegue justo hasta el borde superior del recipiente.

(c) Determine el tiempo que tarda la partícula en llegar hasta el borde superior del recipiente.



$\boxed{\textbf{P1}.\text{-}}$

$\boxed{\textbf{a}.\text{-}}$ En el eje x tenemos la ecuación escalar:

$$m\ddot{x} = F_0 \quad (+0.25 \text{ puntos}) \tag{1}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{F_0}{m}t \tag{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{2m}t^2. \quad (+1 \text{ punto}) \tag{3}$$

Y en el eje y tenemos la ecuación escalar (cuando el avión ya despega, antes también se le suma una fuerza normal):

$$m\ddot{y} = b\dot{x} - mg. \quad (+0.25 \text{ puntos}) \tag{4}$$

El avión despega cuando la fuerza de sustentación se iguala a la fuerza peso (la velocidad aumenta con el tiempo, así que luego la fuerza de sustitución es mayor que la fuerza peso), así que llamemos t_1 al tiempo transcurrido desde que comienza el movimiento hasta que se igualan las fuerzas (despegue) (+0.5 puntos),

$$\begin{aligned} \underbrace{b\dot{x}(t_1)}_{\text{sustentación}} &= \underbrace{mg}_{\text{peso}} \\ b\frac{F_0}{m}t_1 &= mg \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{m^2 g}{bF_0}, \quad (+0.5 \text{ puntos}) \end{aligned}$$

con este tiempo evaluamos en expresión de la posición en el eje x, ecuación (3),

$$x(t_1) = x_S = \frac{F_0}{2m}{t_1}^2 = \frac{m^3 g^2}{2b^2 F_0}. \quad (+0.5 \text{ puntos})$$

$\boxed{\textbf{b}.\text{-}}$ Llamemos t_2 al tiempo transcurrido hasta que $x = 2x_S$, que calculamos con la expresión de la posición $x(t)$,

$$x(t_2) = 2x_s = \frac{F_0}{2m}{t_2}^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{4mx_S}{F_0}} = \sqrt{2}\frac{m^2 g}{bF_0}. \quad (+1 \text{ punto})$$

La velocidad en el eje x en este tiempo sería:

$$\dot{x}(t_2) = v_x(t_2) = \frac{F_0}{m}t_2 = \frac{F_0}{m}\sqrt{\frac{4mx_S}{F_0}} = \frac{\sqrt{2}mg}{b}.$$

Para calcular la velocidad en el eje y en el tiempo t_2, reemplazamos la expresión de $\dot{x}$ en la ecuación (4) **e integramos desde el tiempo que despega** (no desde $t = 0$, ya que para tiempos anteriores al despegue tenemos la fuerza normal, e $\ddot{y} = 0$, y no nos interesa esa parte del movimiento para la dinámica en y), t_1, hasta que alcanza la posición $2x_S$, t_2, donde tenemos que el avión comienza subiendo con velocidad nula en el eje y.

$$\int_0^{v_y(t_2)} d\dot{y} = \frac{bF_0}{m^2}\int_{t_1}^{t_2} tdt - g\int_{t_1}^{t_2} dt$$
$$v_y(t_2) = \frac{bF_0}{2m^2}({t_2}^2 - {t_1}^2) - g(t_2 - t_1), \quad (+0.5 \text{ puntos})$$

reemplazamos t_1, t_2 y x_S,

$$\begin{aligned}
v_y(t_2) &= \frac{bF_0}{2m^2}\left(\frac{4mx_S}{F_0} - \frac{m^4g^2}{b^2{F_0}^2}\right) - g\left(\sqrt{\frac{4mx_S}{F_0}} - \frac{m^2g}{bF_0}\right) \\
&= \frac{bF_0}{2m^2}\left(\frac{4m}{F_0}\frac{m^3g^2}{2b^2F_0} - \frac{m^4g^2}{b^2{F_0}^2}\right) - g\left(\sqrt{\frac{4m}{F_0}\frac{m^3g^2}{2b^2F_0}} - \frac{m^2g}{bF_0}\right) \\
&= \frac{bF_0}{2m^2}\left(\frac{2m^4g^2}{b^2{F_0}^2} - \frac{m^4g^2}{b^2{F_0}^2}\right) - g\left(\sqrt{\frac{2m^4g^2}{b^2{F_0}^2}} - \frac{m^2g}{bF_0}\right) \\
&= \frac{m^2g^2}{2bF_0} - (\sqrt{2} - 1)\frac{m^2g^2}{bF_0} \\
&= \frac{m^2g^2}{bF_0}(1.5 - \sqrt{2}) \quad (+1 \text{ punto})
\end{aligned}$$

Como medimos el ángulo con respecto a la horizontal, la tangente de α se calcula con los módulos de las velocidades en los ejes x e y:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{m^2g^2}{bF_0}(1.5 - \sqrt{2})\frac{\sqrt{2}b}{2mg} = \frac{(1.5 - \sqrt{2})\sqrt{2}}{2}\frac{mg}{F_0} \approx 0.061\frac{mg}{F_0}$$
$$\Rightarrow \alpha \approx \arctan\left(0.061\frac{mg}{F_0}\right). \quad (+0.5 \text{ puntos})$$

$\boxed{\textbf{P2.-}}$

$\boxed{\textbf{a.-}}$ Utilizamos coordenadas cilíndricas, por lo que las ecuaciones escalares para los ejes $\hat{\rho}$ y $\hat{k}$ son:

$$\hat{\rho})\ m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -N \quad (+0.5 \text{ puntos})$$
$$\hat{k})\ m\ddot{z} = -mg + F_{roce}, \quad (+0.5 \text{ puntos})$$

(ojo con el signo que acompaña a la fuerza normal, si se toma como $+N$ estamos diciendo que la fuerza va hacia afuera del cilindro) donde la distancia al eje de giro es constante ($\rho = D \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$) (+0.25 puntos), la velocidad angular es constante ($\dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$) y la partícula no debe caer, así que $\ddot{z} = 0$, así que las ecuaciones nos quedan:

$$\hat{\rho})\ N = mR{\omega_0}^2 \quad (+0.5 \text{ puntos})$$
$$\hat{k})\ mg = F_{roce},$$

en el límite del roce estático se tiene $F_{roce} = \mu_e N$ (+0.25 puntos),

$$\hat{k})\ mg = \mu_e mR{\omega_0}^2 \Rightarrow \mu_e = \frac{g}{R{\omega_0}^2} \quad (+1 \text{ punto})$$

$\boxed{\textbf{b.-}}$ Se siguen manteniendo las condiciones para $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$, así que $N = mR{\omega_1}^2$, pero ahora se tiene aceleración en z y consideramos roce cinético ($F_{roce} = \mu_c N$),

$$m\ddot{z} = -mg - \mu_c N = -mg - \mu_c mR{\omega_1}^2. \quad (+0.5 \text{ puntos}) \tag{5}$$

Tenemos que la velocidad inicial vertical es $\dot{z}_0 = v_1$ y para que la partícula llegue justo al borde imponemos que la velocidad vertical sea 0 cuando la partícula esté a la altura D. Usamos truco de mecánica para la ecuación (5) e integramos desde la altura inicial $D/2$ hasta la altura final D,

$$\int_{v_1}^{0} \dot{z}d\dot{z} = -(g + \mu_c R{\omega_1}^2)\int_{D/2}^{D} dz$$
$$-\frac{{v_1}^2}{2} = -(g + \mu_c R{\omega_1}^2)\frac{D}{2}$$
$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{(g + \mu_c R{\omega_1}^2)D} \quad (+1 \text{ punto})$$

$\boxed{\textbf{c.-}}$ Integramos con respecto al tiempo la ecuación (5) donde sabemos que comienza con velocidad v_1,

$$\dot{z} = v_1 - (g + \mu_c R{\omega_1}^2)t, \quad (+0.5 \text{ puntos})$$

y llega con velocidad nula, $\dot{z}(t^*) = 0$ (+0.5 puntos), reemplazamos.

$$0 = v_1 - (g + \mu_c R{\omega_1}^2)t^*$$
$$\Rightarrow t^* = \frac{v_1}{g + \mu_c R{\omega_1}^2} = \sqrt{\frac{D}{g + \mu_c R{\omega_1}^2}} \quad (+0.5 \text{ puntos})$$