Auxiliar 9

Energía y sólido rígido

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Javier Huenupi, Clemente Miranda
Ayudantes: Catalina Cerna, Giulianna Pesce

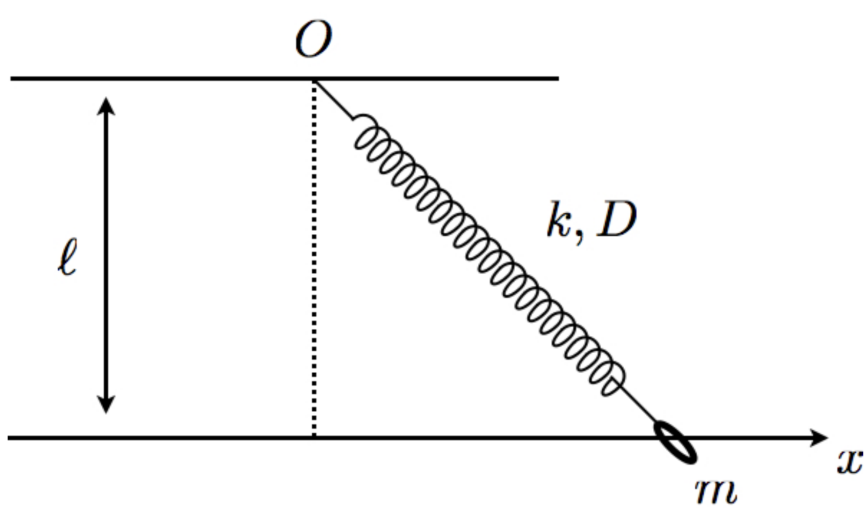
P1.- Energía mecánica 1D

Una argolla de masa m puede deslizarse sin roce a lo largo de una varilla dispuesta sobre el eje x de la figura. La argolla está unida a un resorte de constante elástica k y largo natural D, cuyo otro extremo está unido a un punto fijo O ubicado a una altura l de la varilla.

a) Determine el potencial $U(x)$ que controla el movimiento de la argolla m

b) Determine la posición de los dos puntos de equilibrio estable del sistema para el caso $D > l$

c) Suponga que la argolla se desplaza desde $x = 0$ al punto de equilibrio $x_e > 0$. ¿Cuánto trabajo ejerce el resorte en dicho recorrido?



P2.- Energía mecánica 2D

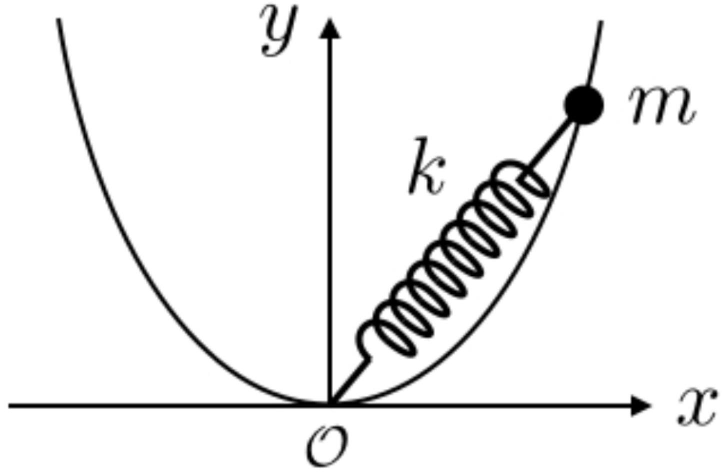
Un anillo de masa m puede deslizar sin roce por un alambre dado por $y = x^2/x_0$ (ver figura). El anillo está unido a un resorte ideal de constante k, largo natural nulo ($l_0 = 0$), y sujeto al punto $\mathcal{O}$. Además de la fuerza del resorte $\vec{F}_R$ y de la fuerza ejercida por el alambre $\vec{F}_A$, sobre el anillo acúa una fuerza externa

$$\vec{F}_E = \frac{k}{x_0}\left(xy\hat{\imath} + \frac{3x_0}{4}y\hat{\jmath}\right) .$$

a) Identifique cuáles de estas fuerzas realizan trabajo. Justifique su respuesta.

b) Encuentre el trabajo total que se realiza sobre el anillo cuando este se mueve desde $x = x_0$ hasta $x = \lambda x_0$ con λ arbitrario

c) Encuentre todos los puntos en que el anillo posee la misma rapidez que la que tiene al pasar por el punto $x = x_0$

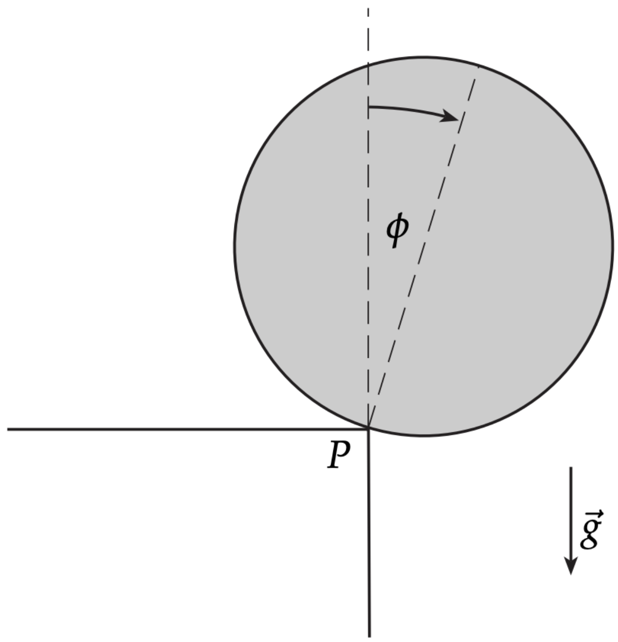


P3.- Sólido rígido

Un disco de radio R, masa total M y momento de inercia $I = \frac{MR^2}{\alpha}$ con respecto al punto de apoyo P ($\alpha < 1$), cae, sin deslizar, desde el borde P de una mesa, como lo sugiere la figura. En el instante inicial $\phi = 0$ y $\dot{\phi} = 0$.

a) Determine $\dot{\phi}$ en función de ϕ

b) Determine las componentes de la fuerza de contacto como función de ϕ (es decir, la reacción en el punto P, en sus componentes, normal y roce)



Formulario

Energía

La energía mecánica de un sistema de una partícula es igual a la suma de su energía cinética K y potencial U

$$\begin{aligned} E &= K + U \\ &= \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + U \,, \end{aligned}$$

donde $|\vec{v}|$ es la rapidez de la partícula en el sistema de coordenadas que hayan elegido.

Trabajo

El trabajo ejercido por una fuerza se describe como la integral de tal fuerza en la trayectoria de la partícula

$$W_{A \to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \,.$$

El trabajo hecho por **todas las fuerzas no conservativas** nos da la diferencia de energía mecánica

$$E_B - E_A = W^{\mathrm{NC}}_{A \to B} \,.$$

El trabajo realizado por una **fuerza conservativa** $\vec{F}_{\mathrm{C}}$ se puede calcular con

$$W^{\mathrm{C}}_{A \to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(r_A) - U(r_B) \,,$$

donde U es el potencial asociado a $\vec{F}_C$, o sea $\vec{F}_C = -\nabla U$.

Además, el **trabajo total** (considerando tanto fuerzas conservativas como no conservativas) se puede calcular como

$$W^{\mathrm{tot}}_{A \to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{\mathrm{tot}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = K(r_B) - K(r_A) \,.$$

Conservación de la energía

Las fuerzas conservativas **conservan la energía mecánica**

$$\begin{aligned} E_0 &= E_f \\ \Leftrightarrow K_0 + U_0 &= K_f + U_f \,. \end{aligned}$$

Las fuerzas conservativas más comunes son las fuerzas centrales $\vec{F} = F\hat{r}$. En general, una fuerza es conservativa si su rotor es 0

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla U \,.$$

Ojo que una fuerza conservativa **sí** puede ejercer trabajo.

Tensor de inercia

Para un sólido rígido con una distribución continua (no necesariamente homogénea) de masa, su tensor de inercia (tomando como pivote/origen un punto $\mathcal{O}'$) se calcula como

$$I_{\mathcal{O}'} = \int \begin{pmatrix} (y')^2 + (z')^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & (x')^2 + (z')^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & (x')^2 + (y')^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}m'$$

que también se puede escribir como

$$I_{\mathcal{O}'}^{ij} = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \, \mathrm{d}m \ , \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

El diferencial de masa se expresa de distintas formas según si el sólido es lineal, superficial o volumétrico

$$\mathrm{d}m' = \lambda \, \mathrm{d}l' \,, \quad \mathrm{d}m' = \sigma \, \mathrm{d}A' \,, \quad \mathrm{d}m' = \rho \, \mathrm{d}V' \,.$$

Ecuaciones de movimiento

La relación entre el momentum angular y torque de un sólido rígido es:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}$$

donde $\vec{L} = I_{\mathcal{O}} \vec{\Omega}$ con $I_{\mathcal{O}}$ el tensor de inercia medido c/r al pivote y $\vec{\Omega}$ el vector velocidad angular del cuerpo.

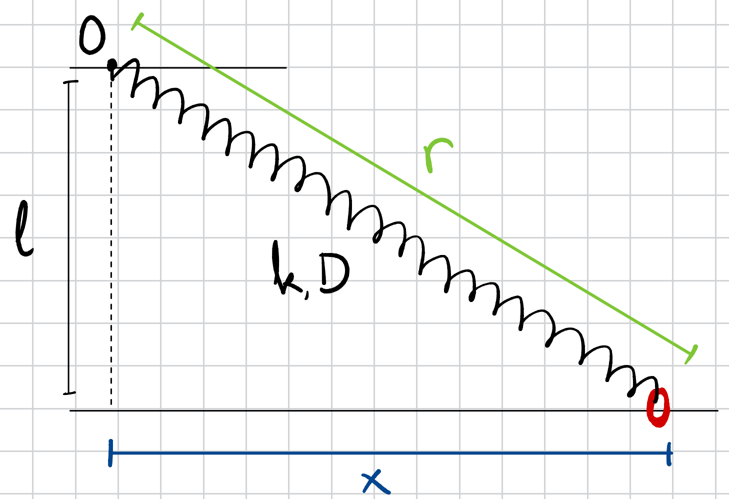
La segunda Ley de Newton para un sólido rígido se expresa como:

$$M_{\text{tot}} \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

con M_{tot} la masa total, $\vec{R}$ el vector posición del centro de masa y $\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$ la suma de las fuerzas externas actuando sobre el sólido rígido.

Auxiliar 9

P1



a) Solo necesitamos considerar una energía potencia, que es la elástica dada por

$$U_E(r) = \frac{1}{2}k(r-D)^2$$

pero como la queremos en función de x, debemos ocupar geometría. Es fácil ver que

$$r^2 = x^2 + \ell^2,$$

entonces $U_E(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+\ell^2} - D\right)^2$

b) La energía mecánica sería

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+\ell^2} - D\right)^2$$

y los ptos. de equilibrio están dados por la condición

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_e} \overset{!}{=} 0$$

que en este caso sería

$$\left.\frac{\partial U_E}{\partial x}\right|_{x=x_e} = k\left(\sqrt{x^2+\ell^2} - D\right)\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+\ell^2}}\right|_{x=x_e} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_e^2+\ell^2} - D \overset{!}{=} 0 \quad \vee \quad \boxed{x_e \overset{!}{=} 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_e = \pm\sqrt{D^2-\ell^2}}$$

Para saber la estabilidad necesitamos analizar el signo de la segunda derivada

$$\left.\frac{\partial U_E}{\partial x}\right|_{x=x_e} = k\,\frac{x^2}{x^2+\ell^2} + k\left(\sqrt{x^2+\ell^2} - D\right)\left[\frac{1}{(x^2+\ell^2)^{1/2}} - \frac{x^2}{(x^2+\ell^2)^{3/2}}\right]$$

donde para $x_e = 0$

inestable

$$U''(x_e=0) = \frac{k(\ell - D)}{\ell} < 0, \text{ ya que } D > \ell$$

y para $x_e = \pm\sqrt{D^2-\ell^2}$

estables

$$U''(x_e = \cancel{\cdot}) = k\,\frac{(D^2-\ell^2)}{D^2} > 0, \text{ por la misma razón}$$

c) Nos piden calcular el trabajo ejercido por el resorte, por lo que ocupamos la fórmula

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' \quad (1)$$

donde $\vec{r}_A = 0\hat{\imath}$ y $\vec{r}_B = +\sqrt{D^2-\ell^2}\,\hat{\imath}$. Sin embargo, estamos hablamdo de una fuerza conservativa donde existe la relación

$$\vec{F} = -\nabla U \quad \Rightarrow \quad U(\vec{r}) = -\int^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,'$$

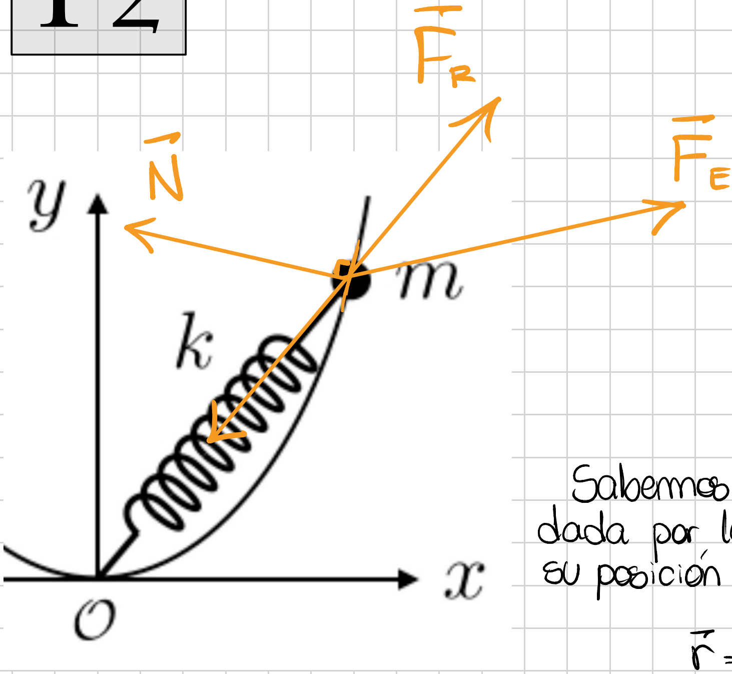
así que

$$(1) \Rightarrow W_{0\to x_e} = \int_0^{x_e} \vec{F}(\vec{x}\,')\cdot d\vec{x}\,' = -U_e(x_e) + U_e(0)$$

$$= -\frac{1}{2}k\underbrace{(\cancel{D - D})}_{=0} + \frac{1}{2}k(\ell - D)^2$$

$$= \frac{1}{2}k(\ell - D)^2$$

P2



a) No tenemos $\vec{g}$, así que no hay fuerza peso. Las únicas fuerzas actuando sobre m son:

- Resorte $\vec{F}_R$
- Normal $\vec{N}$
- Fuerza externa $\vec{F}_E$

Sabemos que la partícula se mueve siguiendo una parábola dada por la forma del alambre, así que podemos escribir su posición en cartesianas como

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = x\hat{\imath} + \frac{x^2}{x_0}\hat{\jmath} \quad (1)$$

y por la def. de trabajo

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \quad (2)$$

sabemos que no ejercen trabajo las fuerzas que son perpendiculares a la trayectoria, ya que si $\vec{F} \perp \vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \vec{r} \in [\vec{r}_A, \vec{r}_B]$$

$$\Rightarrow W_{A\to B} = 0$$

Por la expresión de nuestras fuerzas tenemos que $\vec{N} \perp \vec{r}$, mientras que $\vec{F}_R$ y $\vec{F}_E$ no son perpendiculares a la trayectoria

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_R \text{ y } \vec{F}_E \text{ realizan trabajo}}$$

b) Sabemos que $\vec{F}_R$ es conservativa al ser central, por lo que no necesitamos usar (2) para calcular su trabajo, sino que ocuparemos

$$W^c_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}^c(\vec{r})\cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) \quad (3)$$

donde $\vec{F}^c = \vec{F}_R$ y $U(\vec{r}) = \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + \frac{x^4}{x_0^2}} - \overset{=0}{\cancel{l_0}}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(x^2 + \frac{x^4}{x_0^2}\right)$

Debemos definir los límites de integración, en este caso

$$\vec{r}_A = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath} = x_0\hat{\imath} + x_0\hat{\jmath} \quad \text{y} \quad \vec{r}_B = x_f\hat{\imath} + y_f\hat{\jmath} = \lambda x_0\hat{\imath} + \lambda^2 x_0\hat{\jmath}$$

y reemplazando en $U(\vec{r})$

- $U(x=x_0) = kx_0^2$
- $U(x=\lambda x_0) = \frac{1}{2}k(\lambda^2+\lambda^4)x_0^2$

y ocupando (3)

$$\Rightarrow W^R_{x_0\to\lambda x_0} = U(x_0) - U(\lambda x_0) = kx_0^2 - \frac{1}{2}k(\lambda^2+\lambda^4)x_0^2 \quad (4)$$

Mientras que para $\vec{F}_E$ ocuparemos directamente (2)

$$\vec{F}_E(x,y) = \frac{k}{x_0}\left(xy\hat{\imath} + \frac{3}{4}x_0 y\hat{\jmath}\right)$$

$$= \frac{k}{x_0}\left(\frac{x^3}{x_0}\hat{\imath} + \frac{3}{4}x^2\hat{\jmath}\right)$$

Calculamos el diferencial de posición con (1)

$$d\vec{r} = dx\hat{\imath} + 2\frac{x}{x_0}dx\hat{\jmath}$$

y reemplazando en (2)

$$\Rightarrow W^E_{x_0\to\lambda x_0} = \int_{x_0}^{\lambda x_0} \vec{F}_E(x)\cdot d\vec{r} = \int_{x_0}^{\lambda x_0} \frac{k}{x_0}\left(\frac{x^3}{x_0}\hat{\imath} + \frac{3}{4}x^2\hat{\jmath}\right)\cdot\left(dx\hat{\imath} + 2\frac{x}{x_0}dx\hat{\jmath}\right)$$

$$= \frac{k}{x_0}\int_{x_0}^{\lambda x_0}\left(\frac{x^3}{x_0} + \frac{3}{2}\frac{x^3}{x_0}\right)dx$$

$$= \frac{5}{2}\frac{k}{x_0^2}\int_{x_0}^{\lambda x_0} x^3 dx$$

$$= \frac{5}{8}k(\lambda^4 - 1)x_0^2 \quad (5)$$

Juntando (4) con (5) obtenemos el trabajo total

$$W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0} = W^R_{x_0\to\lambda x_0} + W^E_{x_0\to\lambda x_0} = kx_0^2 - \frac{1}{2}k(\lambda^2+\lambda^4)x_0^2 + \frac{5}{8}k(\lambda^4-1)x_0^2$$

$$= \boxed{\frac{3}{8}kx_0^2 - \frac{1}{2}k\lambda^2x_0^2 + \frac{1}{8}k\lambda^4x_0^2} \quad (6)$$

c) Que la partícula vuelva a tener la rapidez que tenía en x_0 es lo mismo que vuelva a tener la misma energía cinética $K(x=x_0)$, o sea queremos

$$K(x_0) \overset{!}{=} K(x_f)$$

Revisando el formulario notamos que

$$W^{tot}_{A\to B} = K(\vec{r}_B) - K(\vec{r}_A)$$

y en **b)** ya calculamos $W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0}$ para un λ cualquiera, así que si imponemos nuestra condición

$$K(x_0) \stackrel{!}{=} K(\lambda x_0)$$

es equivalente a imponer $W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0} \stackrel{!}{=} 0$, de donde podemos despejar λ. Igualemos a 0 la expresión de (6)

$$W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0} = \frac{3}{8}kx_0^2 - \frac{1}{2}k\lambda^2 x_0^2 + \frac{1}{8}k\lambda^4 x_0^2 \stackrel{!}{=} 0$$

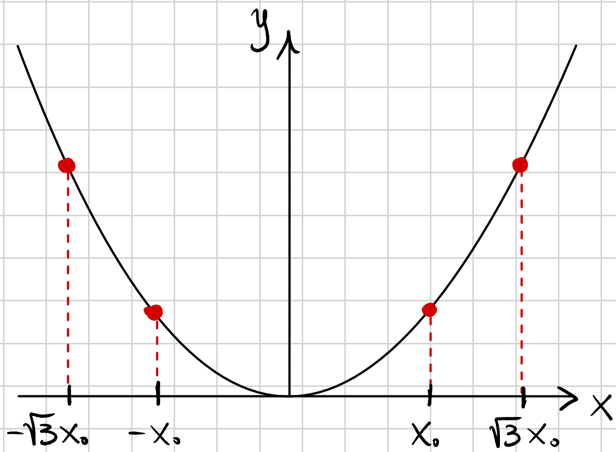
y si definimos $\tilde{\lambda} := \lambda^2$ obtenemos una ec. cuadrática

$$\tilde{\lambda}^2 - 4\tilde{\lambda} + 3 \stackrel{!}{=} 0$$

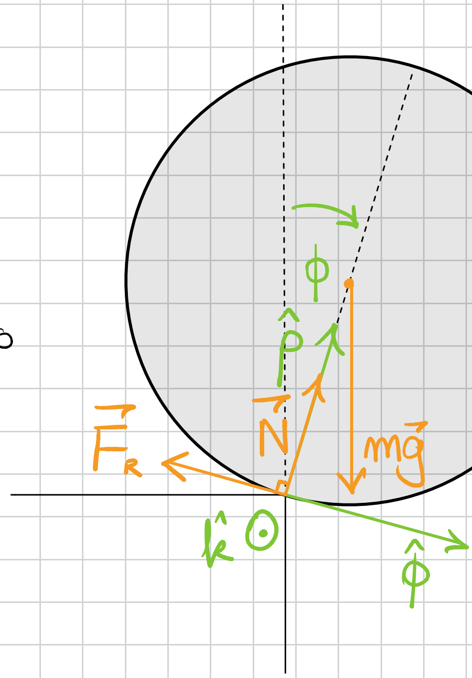
$$\Rightarrow \tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = 3 \text{ o } 1$$

$$\Rightarrow \lambda \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1, -1\}$$

así que la partícula tiene la misma rapidez en $x = \{\sqrt{3}x_0, -\sqrt{3}x_0, x_0, -x_0\}$



P3



a) Para obtener $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\phi)$ primero hay que obtener la EoM del sólido rígido. Para esto utilizaremos la relación torque - momentum angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Para sólidos continuos ocupamos la siguiente definición del momentum angular:

$$\vec{L} = I_O \vec{\Omega}$$

donde I_O es el tensor de inercia medido desde el pivote O, y $\vec{\Omega}$ la velocidad angular. I_O es una matriz diagonal (usualmente) de 3×3, en este caso, por enunciado sabemos

$$I_O = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/\alpha \end{pmatrix}.$$

En este problema solo tenemos movimiento angular en la dirección (positiva) de $\hat{k}$, entonces

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

entonces concluimos que $\vec{L} = I_O\vec{\Omega} = \frac{MR^2}{\alpha}\dot{\phi}\hat{k} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{MR^2}{\alpha}\ddot{\phi}\hat{k}$

El torque se calcula igual que para partículas. En este caso el peso es la única fuerza que ejerce torque, ya que la normal y el roce tienen brazo de palanca nulo.

El peso en nuestro sist. cilíndrico es $M\vec{g} = -Mg\cos\phi\hat{\rho} + Mg\sin\phi\hat{\phi}$, y, por def., esta fuerza siempre se ejerce sobre el centro de masa, que en este caso es justo al centro del cuerpo (por simetría y homogeneidad), entonces

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = R\hat{\rho}\times(-Mg\cos\phi\hat{\rho} + Mg\sin\phi\hat{\phi})$$
$$= MgR\sin\phi\hat{k}.$$

Finalmente, nuestra EoM es: $\frac{MR^2}{\alpha}\ddot{\phi}\hat{k} = MgR\sin\phi\hat{k} \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = \frac{\alpha g}{R}\sin\phi}$ (1)

que podemos integrar con truco de mecánica

$$\int_0^{\dot\phi} \dot\phi\, d\dot\phi = \frac{\alpha g}{R}\int_0^{\phi} \sin\phi\, d\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot\phi^2 = \frac{2\alpha g}{R}(1-\cos\phi)} \quad (2)$$

b) Con la relación torque-momentum angular perdemos toda la info de las fuerzas actuando sobre el pivote. Para hacerlas aparecer usamos

$$M\ddot{\vec R}_{CM} = \sum_i \vec F_i$$

donde sabemos que $\vec R_{CM} = R\hat\rho \Rightarrow \ddot{\vec R}_{CM} = -R\dot\phi^2\hat\rho + R\ddot\phi\hat\phi$ y las fuerzas serían

$$\sum_i \vec F_i = N\hat\rho - F_R\hat\phi - Mg\cos\phi\,\hat\rho + Mg\sin\phi\,\hat\phi$$

entonces la EoM vectorial es

$$-MR\dot\phi^2\hat\rho + MR\ddot\phi\,\hat\phi = N\hat\rho - F_R\hat\phi - Mg\cos\phi\,\hat\rho + Mg\sin\phi\,\hat\phi$$

así que las escalares son:

$$\hat\rho)\ -MR\dot\phi^2 = N - Mg\cos\phi$$

$$\hat\phi)\ MR\ddot\phi = -F_R + Mg\sin\phi$$

De aquí podemos despejar N y F_R y usar (1) y (2)

▹ $N = Mg\cos\phi - MR\dot\phi^2 = \boxed{Mg(\cos\phi - 2\alpha(1-\cos\phi))}$

▹ $F_R = Mg\sin\phi - MR\ddot\phi = \boxed{Mg\sin\phi\,(1-\alpha)}$