Auxiliar 9

Hamiltoniano I

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- M.A.S

Usando formalismo Hamiltoniano, encuentre las ecuaciones de movimiento de un oscilador armónico simple.

P2.-

Considere una partícula de masa m que se mueve en un cono invertido de ángulo de apertura α.

a) Encuentre el Lagrangiano del sistema

b) Calcule los momentum conjugados asociados a los grados de libertad

c) Encuentre el Hamiltoniano del sistema y calcule las ecuaciones de Hamilton

P3.-

Considere una partícula de masa m que se mueve siguiendo una espiral de radio R y paso a. Encuentre el Hamiltoniano del sistema y las cantidades conservadas

P4.- Electromagnetismo

Considere una partícula no relativista de masa m y carga q moviéndose en presencia de un campo electromagnético, el Lagrangiano de este sistema está dado por

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\,,$$

donde ϕ y $\mathbf{A}$ son funciones de la posición y el tiempo. Encuentre el Hamiltoniano del sistema.

P5.- Sistema de partículas: Propuesto

Encuentre el Hamiltoniano de un sistema compuesto por una partícula de masa M y n partículas de masa m. Para esto:

a) Primero encuentre el Lagrangiano L de este problema

b) Elimine el movimiento del centro de masa (CM) definiendo

$$\mathbf{r}_a \equiv \mathbf{R}_a - \mathbf{R}$$

con $\mathbf{R}$ la posición de la masa M y $\mathbf{R}_a$ la posición de la partícula a-ésima de masa m

c) Por ausencia de fuerzas externas, defina la posición del CM en $\mathbf{R}_{\text{CM}} = 0$

d) Encuentre las momentum conjugados y exprese el Hamiltoniano usando

$$H = \sum_i p_i q_i - L$$

Formulario

Ecuaciones de Hamilton

A partir de un Lagrangiano L en función de las coordenadas y velocidades, q_i, $\dot{q}_i$, los momentum conjugados se calculan como

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,.$$

A partir de los momentum, el Hamiltoniano H del sistema se calcula como

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L\,,$$

donde los $\dot{q}_i$ se expresan función de los momentum $\{p_j\}$.

El simil de las ecuaciones de Euler-Lagrange de mecánica Lagrangiana, en mecánica Hamiltoniana son las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \wedge \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Auxiliar 9

P1

Tenemos el Lagrangiano de un oscilador armónico simple

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

entonces el momentum conjugado asociado a x es

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

así que el Hamiltoniano del sist. sería

$$H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L = p_x \dot{x} - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{p_x^2}{m} - \frac{1}{2}\frac{p_x^2}{m} + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

y las ecuaciones de Hamilton serían

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad (1) \qquad \wedge \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \quad (2)$$

derivando (1) y reemplazando con (2)

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} = -\frac{k}{m} x \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (3)$$

que es la EoM usual que ya conocíamos. Sin embargo, resolvamos el sist. diferencial (1), (2), de forma matricial

$$\mathbb{1}_{2\times 2} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}$$

proponemos el ansatz $\vec{\eta}(t) = \vec{\eta}_0 e^{\lambda t}$ con $\vec{\eta}_0$ el vector de C.I.s, reemplazando

$$\Rightarrow \mathbb{1}_{2\times 2} \lambda \vec{\eta}_0 e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & 0 \end{pmatrix} \vec{\eta}_0 e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & m^{-1} \\ -k & -\lambda \end{pmatrix} \vec{\eta}_0 = \vec{0}$$

donde para no tener sols. triviales, $\vec{\eta}_0 = \vec{0}$, imponemos $\det(\cdot) \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & m^{-1} \\ -k & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_{+,-} = \pm i\omega_0 \text{ , con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

así que las sols. son como $\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix} = \vec{A} e^{i\omega_0 t} + \vec{B} e^{-i\omega_0 t}$

Si hubiésemos resuelto (3) habríamos obtenido

$$x = A_1 e^{i\omega_0 t} + B_1 e^{-i\omega_0 t}$$

y como encontramos que $p_x = m\dot{x}$

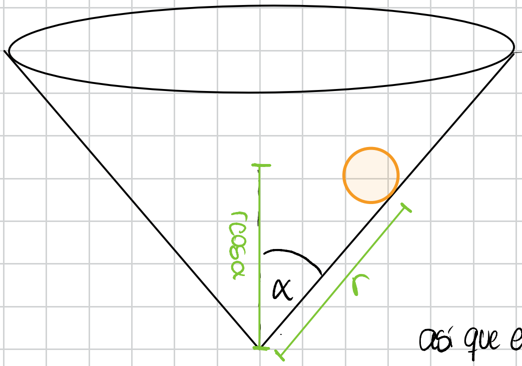
$$\Rightarrow p_x(t) = i\omega_0 m A_1 e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 m B_1 e^{-i\omega_0 t} \equiv A_2 e^{i\omega_0 t} + B_2 e^{-i\omega_0 t}$$

que se puede resumir en

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} \equiv \vec{A} e^{i\omega_0 t} + \vec{B} e^{-i\omega_0 t}$$

que es lo que ya habíamos encontrado con formalismo Hamiltoniano

P2



La energía cinética en coord esféricas es

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2)$$

y la potencial es la gravitatoria

$$U_g=mgz=mgr\cos\alpha$$

así que el Lagrangiano es:

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2)-mgr\cos\alpha$$

Ahora tenemos dos rapideces, $\dot{r}$ y $\dot{\phi}$, por lo que tenemos dos momentum conjugados:

- $p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r} \Rightarrow \dot{r}=\frac{p_r}{m}$
- $p_\phi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=mr^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi}=\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\alpha}$

Calculemos el Hamiltoniano

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L=p_r\dot{r}+p_\phi\dot{\phi}-\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2)+mgr\cos\alpha$$

$$=\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\phi^2}{mr^2\sin^2\alpha}-\frac{p_r^2}{2m}-\frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha$$

$$=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha$$

y las ecs. de Hamilton son:

- $\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m}$ (1)
- $\dot{\phi}=\frac{\partial H}{\partial p_\phi}=\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\alpha}$ (2)
- $\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{p_\phi^2}{mr^3\sin^2\alpha}-mg\cos\alpha$ (3)
- $\dot{p}_\phi=-\frac{\partial H}{\partial \phi}=0$ (4) ⟵ conservación!

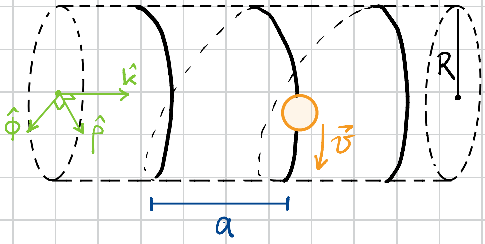
De (4) tenemos que

$$p_\phi=mr^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}=cte\equiv\mathcal{L}$$

y derivando una vez (1) y reemplazando con (3)

$$\Rightarrow \ddot{r}=\frac{\dot{p}_r}{m}=\frac{\mathcal{L}^2}{m^2r^3\sin^2\alpha}-mg\cos\alpha$$

P3



Que la partícula se mueva en una espiral de radio R implica que

$$\rho = R \quad \text{cte.}$$

y que la espiral sea de paso a quiere decir que luego de una vuelta completa ($\theta: n2\pi \longrightarrow (n+1)2\pi$) la partícula avanza horizontalmente una distancia a, en coord. esto es:

$$z = z_0 + a(\phi+\phi_0)/2\pi$$

donde z_0, ϕ_0 son C.I. que las podemos tomar como nulas eligiendo bien el origen y orientación inicial del sist. de coord., $z_0 = \phi_0 \overset{!}{=} 0$.

En coord. cilíndricas la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m (\underbrace{\cancel{\dot{\rho}^2}}_{=0} + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

y no hay energía potencial, por lo que el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} m (R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

los momentum conjugados son calculados como

▷ $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi}$ ▷ $p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$

así que el Hamiltoniano es

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \frac{p_\phi^2}{mR^2} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{p_\phi^2}{2mR^2} - \frac{p_z^2}{2m} = \frac{p_\phi^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m}$$

y las ecs. de Hamilton serían

▷ $\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2}$ ▷ $\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$

▷ $\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$ ▷ $\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ } conservaciones

donde notamos que tenemos conservación para p_ϕ y p_z

$$p_\phi = p_\phi(t=0) = mR^2\dot{\phi}(t=0) \quad \text{y} \quad p_z = p_z(t=0) = m\dot{z}(t=0) = m\frac{a}{2\pi}\dot{\phi}(t=0)$$

P4

Tenemos el Lagrangiano de una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético

$$L = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 - q\phi + q\vec{A}\cdot\vec{v}$$
$$= \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2 - q\phi + q\sum_{i=1}^{3} A_i \dot{x}_i$$

entonces los momentums conjugados son:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{x}_j} + q\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j}$$
$$= \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} 2\dot{x}_i \delta_i^j + q\sum_{i=1}^{3} A_i \delta_i^j$$
$$= m\dot{x}_j + qA_j \Rightarrow \dot{x}_j = \frac{p_i}{m} - \frac{q}{m} A_j$$

así que el Hamiltoniano del sistema es

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{x}_i - L = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i}{m}(p_i - qA_i) - \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}(p_i - qA_i)^2 + q\phi - \frac{q}{m}\sum_{i=1}^{3} A_i(p_i - qA_i)$$
$$= \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{q}{m}\vec{p}\vec{A} - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{q}{m}\vec{p}\cdot\vec{A} - \frac{q^2\vec{A}^2}{2m} - \frac{q}{m}\vec{A}\cdot\vec{p} + \frac{q^2}{m}\vec{A}^2 + q\phi$$
$$= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{m}\vec{p}\cdot\vec{A} + \frac{q^2}{2m}\vec{A}^2 + q\phi$$
$$= \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi$$