Auxiliar 9

Torque I

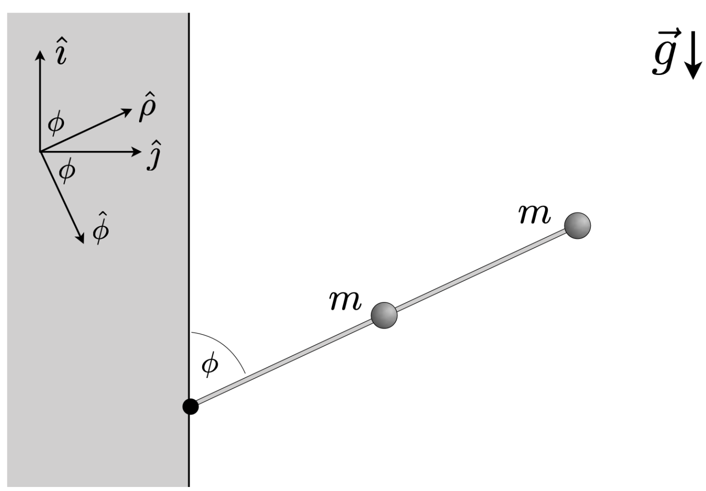
Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.- Intro. al torque

Consideremos dos masas m unidas a una varilla rígida sin masa de largo $2D$, tal como indica la siguiente figura, con ambas masas separadas por una distancia D. La varilla de masa despreciable puede rotar libremente con respecto a una rótula fija a la pared.

a) Encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ

b) Encuentre la expresión de la fuerza que ejerce el pivote sobre la barra $\vec{F}_{\text{piv}}$, en función del ángulo ϕ y constantes del problema



Formulario

Torque y momentum angular

Para un sistema con n partículas, tenemos la relación

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}\,,$$

donde

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i\,; \qquad \vec{L}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\,.$$

Las fórmulas de torque y momentum angular son:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}\,; \qquad \vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}\,,$$

donde $\vec{F}$ es la suma de todas las fuerzas ejercidas sobre la partícula de interés, $\vec{r}$ es el vector posición de la partícula y $\vec{v}$ la velocidad de la misma.

Ec. de movimiento sistema de partículas

Cuando tratamos con más de una partícula, podemos ocupar la ecuación

$$M\ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{tot}}\,,$$

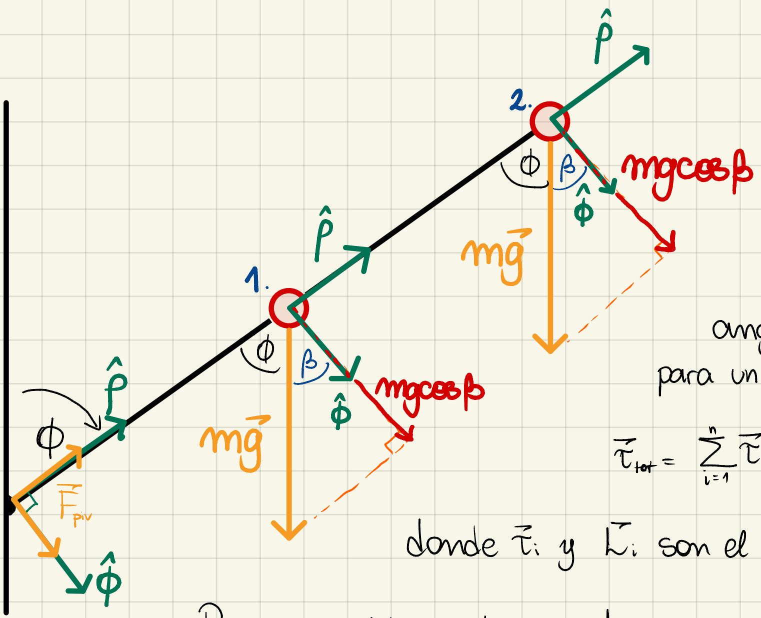
donde M es la suma de todas las masas involucradas, $\vec{R}_{\text{CM}}$ el vector posición del centro de masa (CM) dado por

$$\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot m_i\,,$$

y $\vec{F}_{\text{tot}}$ es la suma de **todas** las fuerzas externas ejercidas sobre le sistema.

Auxiliar 9

P1



Para los problemas con masas y varas que las hacen girar con respecto a un eje, usamos la fórmula

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} \quad (1)$$

que nos relaciona el torque total con el momento angular de las masas. Esta fórmula es válida tanto para un sist. con 1 como con n partículas, ya que

$$\vec{\tau}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i \quad ; \quad \vec{L}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

donde $\vec{\tau}_i$ y $\vec{L}_i$ son el torque y el momento angular de la i-ésima partícula

Para este problema tenemos dos partículas de masa m. La partícula 1. se encuentra a una distacia D del pivote y la única fuerza externa (ojo que la fuerza de la barra sobre la partícula tiene asociada un torque nulo) es la gravitacional

$$\vec{F}_1 = m\vec{g} = -mg\sin\beta\,\hat{\rho} + mg\cos\beta\,\hat{\phi}$$

y el brazo de torque, o vector posición $\vec{r}$, que va desde el pivote a la partícula, es $\vec{r}_1 = D\hat{\rho}$. Así que al calcular el torque sobre esta partícula, usando la fórmula

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,tot} \quad , \text{ con } \vec{F}_{i,tot} = \sum_j \vec{F}_{i,j} \text{ todas las fuerzas sobre la i-ésima partícula}$$

quedaría como

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,tot} = (D\hat{\rho}) \times (-mg\sin\beta\,\hat{\rho} + mg\cos\beta\,\hat{\phi})$$

$$= Dmg\cos\beta\; \hat{\rho} \times \hat{\phi}$$

$$= Dmg\cos\beta\; \hat{k} \quad (2)$$

Ahora, calculemos el momentum angular de la partícula 1., usando

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula. Notamos que en cilíndricas

$$\vec{v}_1 = \cancel{\dot{\rho}}\,\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} = D\dot{\phi}\hat{\phi} \text{ , reemplazando en } \vec{L}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_1 = m\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = m(D\hat{\rho}) \times (D\dot{\phi}\hat{\phi}) = mD^2\dot{\phi}\,\hat{k}$$

derivando con respecto al tiempo

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_1}{dt} = mD^2\ddot{\phi}\hat{k} \quad (3)$$

Haciendo lo mismo, pero para la partícula 2., donde $D \to 2D$, obtenemos

$$\vec{\tau}_2 = 2Dmg\cos\beta\,\hat{k} \;;\; \frac{d\vec{L}_2}{dt} = 4mD^2\ddot{\phi}\hat{k} \quad (4)$$

Así que reemplazando (2), (3) y (4) en (1) obtenemos

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt}$$

$$\Leftrightarrow Dmg\cos\beta\,\hat{k} + 2Dmg\cos\beta\,\hat{k} = mD^2\ddot{\phi}\hat{k} + 4mD^2\ddot{\phi}\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow 3\cancel{D}\cancel{m}g\cos\beta\,\cancel{\hat{k}} = 5\cancel{m}D^{\cancel{2}}\ddot{\phi}\,\cancel{\hat{k}}$$

$$\Rightarrow 3g\cos\beta = 5D\ddot{\phi}$$

donde, por geometría, $\beta = \pi/2 - \phi$

$$\Rightarrow 3g\sin\phi = 5D\ddot{\phi}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi} - \frac{3g}{5D}\sin\phi = 0 \quad (5)$$

con lo que obtenemos una relación entre la aceleración y la posición de las partículas.

Sin embargo, si por alguna razón nos pidieran encontrar una expresión de la fuerza ejercida sobre el pivote, debemos utilizar la ec. de mov. para un sist. de partículas

$$M_{tot}\cdot\ddot{\vec{R}}_{cm} = \sum_i \vec{F}_i$$

donde $\vec{F}_i$ son todas las fuerzas actuando sobre el sistema (no solo las fuerzas ejercidas directamente sobre la partícula). En este problema, además de la fuerza peso sobre las partículas, tenemos la fuerza que ejerce el pivote sobre la barra para que esta pueda girar sin caer ni moverse horizontalmente.

Considerando la fuerza del pivote como

$$\vec{F}_{piv} = F_{piv,\rho}\,\hat{\rho} + F_{piv,\phi}\,\hat{\phi}$$

* Esta fuerza no genera torque porque el $\vec{r} = \vec{0}$

y el CM se encuentra en $\vec{R}_{cm} = 3D/2\,\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{cm} = \frac{3D}{2}\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{cm} = \frac{3D}{2}\ddot{\phi}\hat{\phi} - \frac{3D}{2}\dot{\phi}^2\hat{\rho}$, además $M_{tot} = 2m$

reemplazando

$$\Rightarrow 2m\frac{3D}{2}\left(\ddot{\phi}\hat{\phi}-\dot{\phi}^2\hat{\rho}\right) = F_{piv,\rho}\hat{\rho} + F_{piv,\phi}\hat{\phi} - 2mg\sin\beta\,\hat{\rho} + 2mg\cos\beta\,\hat{\phi}$$

$$= F_{piv,\rho}\hat{\rho} + F_{piv,\phi}\hat{\phi} - 2mg\cos\phi\,\hat{\rho} + 2mg\sin\phi\,\hat{\phi}$$

y nuestras ecs. de mov. escalares serían

$$\hat{\rho})\ -3Dm\dot{\phi}^2 = F_{piv,\rho} - 2mg\cos\phi \rightarrow F_{piv,\rho} = -3Dm\dot{\phi}^2 + 2mg\cos\phi \quad (6)$$

$$\hat{\phi})\ 3Dm\ddot{\phi} = F_{piv,\phi} + 2mg\sin\phi \rightarrow F_{piv,\phi} = 3Dm\ddot{\phi} - 2mg\sin\phi \quad (7)$$

así que resolviendo (5) encontraríamos las fuerzas del pivote para todo tiempo o para cualquier posición. Hagámoslo.

Debido a la forma de la EDO, solo podremos integrarla una vez con truquazo de mecánica

$$\Rightarrow \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = \frac{3g}{5D}\sin\phi \quad \Big/ \int_{\phi_0=0}^{\phi} d\phi$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\phi}_0=0}^{\dot{\phi}} \dot{\phi}\,d\dot{\phi} = \frac{3g}{5D}\int_0^{\phi}\sin\phi\,d\phi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{2} = -\frac{3g}{5D}\cos\phi\Big|_0^{\phi}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\phi}^2(\phi) = \frac{6g}{5D}(1-\cos\phi) \quad (8)$$

Reemplazando (8) en (6) y (5) en (7), obtenemos las fuerzas en función del ángulo

- $F_{piv,\rho} = -3Dm\left(\frac{6g}{5D}(1-\cos\phi)\right) + 2mg\cos\phi$

$$= -\frac{18mg}{5} + \frac{18mg}{5}\cos\phi + 2mg\cos\phi$$

$$= \frac{28}{5}mg\cos\phi - \frac{18}{5}mg$$

} ¿Cuánto vale en $\phi=0$?

- $F_{piv,\phi} = 3Dm\left(\frac{3g}{5D}\sin\phi\right) - 2mg\sin\phi$

$$= \frac{9}{5}mg\sin\phi - 2mg\sin\phi$$

$$= -\frac{mg}{5}\sin\phi$$