Auxiliar 8

Dinámica con fuerzas específicas

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudante: Gerald Barnert

P1.-

Considere un tambor de radio R cuya base se encuentra en posición horizontal. En el fondo del tambor se lanza una partícula con velocidad v_0 a lo largo de la pared del mismo. La partícula no tiene roce con la base del tambor, pero tiene roce cinético con la pared (con coeficiente de roce cinético igual a μ_c)

a) ¿Se detiene en algún momento la partícula?, ¿en cuánto tiempo?

b) Determine al rapidez de la partícula justo cuando ha dado una vuelta completa deslizándose a lo largo de la pared del tambor

c) Determine el tiempo que tarda la partícula en completar esa primera vuelta

Repita el cálculo suponiendo que la partícula no tiene roce con la pared del tambor, pero tiene roce cinético con la base del mismo (con coeficiente de roce cinético igual a μ_c).

d) ¿Se detiene en algún momento la partícula?, ¿en cuánto tiempo?

e) Determine la rapidez de la partícula justo cuando ha dado una vuelta completa deslizándose a lo largo de la pared del tambor

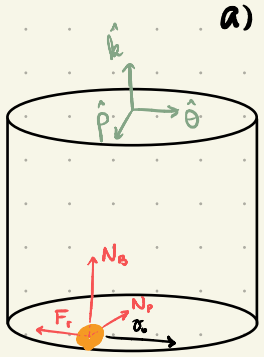
f) Determine el tiempo que tarda la partícula en completar esa primera vuelta

Indicación: Considere que la partícula nunca se separa de la pared lateral, además solo se mueve en la base del cilindro.

Auxiliar 8

P1

a) Usamos coord. cilíndricas. Las fuerzas involucradas son: el peso en $-\hat{k}$, la normal de la base en $\hat{k}$, la normal de la pared en $-\hat{\rho}$ y la fuerza de roce cinético en $-\hat{\theta}$



$$\Rightarrow m((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}) = -mg\hat{k} + N_B\hat{k} - N_p\hat{\rho} - N_p\mu_c\hat{\theta}$$

donde $\ddot{\rho}=\dot{\rho}=\ddot{z}=0 \wedge \rho=R$, por lo que las ecs. escalares quedan como:

$$\hat{\rho})\ -mR\dot{\theta}^2 = -N_p \quad (1)$$
$$\hat{\theta})\ mR\ddot{\theta} = -N_p\mu_c \quad (2)$$
$$\hat{k})\ 0 = -mg + N_B \quad (3)$$

Reemplazando (1) en (2), se tiene:

$$\cancel{mR}\ddot{\theta} = -\cancel{mR}\dot{\theta}^2\mu_c$$
$$\Leftrightarrow \cancel{\dot{\theta}}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\dot{\theta}^{\cancel{2}}\mu_c \quad / \int d\theta$$
$$\Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\mu_c \int_0^{\theta} d\theta$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_0}\right) = -\mu_c\theta$$

donde se tiene $v_0 = R\dot{\theta}_0$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{R\dot{\theta}}{v_0}\right) = -\mu_c\theta$$
$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(\theta) = \frac{v_0}{R}e^{-\mu_c\theta} \quad (4)$$
$$\Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{R}e^{-\mu_c\theta} \quad / \int dt$$
$$\Rightarrow \int_0^{\theta} e^{\mu_c\theta}d\theta = \frac{v_0}{R}\int_0^t dt$$
$$\Leftrightarrow \left.\frac{e^{\mu_c\theta}}{\mu_c}\right|_0^{\theta} = \frac{v_0 t}{R}$$
$$\Leftrightarrow e^{\mu_c\theta} - 1 = \frac{\mu_c v_0 t}{R}$$
$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{\mu_c}\ln\left(\frac{\mu_c v_0 t}{R} + 1\right) \quad (5)$$

La partícula se detiene si $\dot{\theta}=0$, de (4) vemos que esto ocurre cuando $\theta \to \infty$ y de (5) sabemos que esto se tiene para $t \to \infty$

b) La partícula da la vuelta cuando $\theta = 2\pi$, reemplazando en (4) tenemos

$$\dot{\theta}(\theta=2\pi) = \frac{v_0}{R}e^{-2\pi\mu_c} \Rightarrow v(\theta=2\pi) = v_0 e^{-2\pi\mu_c}$$

c) Imponemos $\theta = 2\pi$ en (5)

$$\Rightarrow 2\pi = \frac{1}{\mu_c}\ln\left(\frac{\mu_c v_0 t_1}{R} + 1\right) \Rightarrow t_1 = \frac{R}{\mu_c v_0}\left(e^{2\pi\mu_c} - 1\right)$$

d) Ahora (2) pasaría a ser $mR\ddot{\theta} = -N_\theta \mu_c = -mg\mu_c$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\theta}\, d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{R}\mu_c \quad / \int d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{v_0/R}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = -\frac{g}{R}\mu_c \int_0^{\theta} d\theta$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 - \frac{v_0^2}{R^2} = -\frac{2g\mu_c\theta}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(\theta) = \sqrt{-\frac{2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}\right)^{-1/2} d\theta = dt \quad / \int$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta}\left(-\frac{2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}\right)^{-1/2} d\theta = \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{R}{g\mu_c}\sqrt{-\frac{2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}}\,\Bigg|_0^{\theta} = t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-\frac{2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}} - \frac{v_0}{R} = -\frac{g\mu_c}{R}t$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = -\frac{R}{2g\mu_c}\left[\left(-\frac{g\mu_c}{R}t + \frac{v_0}{R}\right)^2 - \frac{v_0^2}{R^2}\right] = -\frac{R}{2g\mu_c}\left[\left(\frac{g\mu_c}{R}\right)^2 t^2 - \frac{2g\mu_c v_0 t}{R^2}\right]$$

$$= -\frac{g\mu_c}{2R}t^2 + \frac{v_0}{R}t \quad (7)$$

También podemos integrar la ec de mov. c/r al tiempo

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{g}{R}\mu_c \quad / \int dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0/R}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta} = -\frac{g}{R}\mu_c \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = -\frac{g}{R}\mu_c t + \frac{v_0}{R}$$

Imponiendo que pare en $t_2 \Rightarrow 0 \overset{!}{=} -\frac{g\mu_c}{R}t_2 + \frac{v_0}{R} \Leftrightarrow t_2 = \frac{v_0}{g\mu_c}$

e) Usamos (6) con $\theta = 2\pi \Rightarrow \dot{\theta}(\theta = 2\pi) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{4\pi g\mu_c}{R}}$

f) Usamos (7) con $\theta = 2\pi \Rightarrow 2\pi \overset{!}{=} -\frac{g\mu_c}{2R}t_3^2 + \frac{v_0}{R}t_3$

$$\Leftrightarrow a t_3^2 + b t_3 + c = 0, \text{ con } a = \frac{g\mu_c}{4\pi R},\ b = -\frac{v_0}{2\pi R} \text{ y } c = 1$$

$$\Rightarrow t_{3,1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\pi g\mu_c R}}{g\mu_c}$$

donde consideramos la primera solución ($\sqrt{v_0^2 - 4\pi g\mu_c R} < v_0$)

$$\Rightarrow t_3 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 4\pi g\mu_c R}}{g\mu_c}$$