Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001 – Mecánica

Auxiliar 8

Fuerzas restitutivas

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.-

¿La tensión promedio (en el tiempo) en una cuerda de un péndulo simple con una masa puntual m y aceleración de gravedad g es mayor o menor que mg? Asuma una pequeña amplitud de oscilación y explique a qué se debe el valor obtenido.

Hint: El promedio de una función se calcula como $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

P2.-

Sobre una superficie horizontal sin roce una partícula de masa m se mueve ligada a un punto fijo mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En el instante mostrado en la figura su velocidad tiene magnitud v_0 y es perpendicular al resorte, el cual se encuentra en su largo natural. Determine el valor de v_0 tal que la máxima longitud que el resorte alcance sea $4l_0$. Determine también la máxima y mínima rapidez de la partícula en el movimiento resultante.

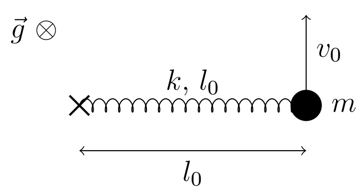

Figura 1: Problema 2

P3.-

Un bloque puntual de masa M se encuentra sobre una superficie inclinada con un ángulo $\alpha = 30°$ respecto de la horizontal y ligado mediante un resorte ideal de largo natural l_0 a un punto fijo O.

1. Sin considerar roce, se observa que el bloque se mantiene en reposo en $x = l_0/2$. Determine el valor de la constante elástica del resorte en función de los datos del problema.

2. Ahora, considerando un roce estático entre el bloque y la superficie con coeficiente $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, determine el rango de la coordenada x en el que el bloque se mantiene quieto.

3. Si en $t = 0$ el bloque se libera desde $x = 0$, determine el tiempo T en el que el bloque se detiene por primera vez, ¿este tiempo depende del roce con la superficie?

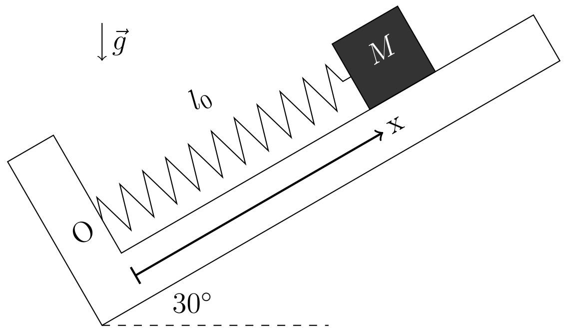

Figura 2: Problema 3

Auxiliar 8

Fuerzas restitutivas

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.-

¿La tensión promedio (en el tiempo) en una cuerda de un péndulo simple con una masa puntual m y aceleración de gravedad g es mayor o menor que mg? Asuma una pequeña amplitud de oscilación y explique a qué se debe el valor obtenido.

Hint: El promedio de una función se calcula como $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Respuesta

Sobre la masa actúa la tensión de la cuerda en el eje radial y la fuerza de gravedad que puede ser descompuesta en el eje radial y angular.

$$m\vec{a} = T + m\vec{g},$$

utilizando coordenadas polares,

$$m((\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\rho}) = -T\hat{\rho} + mg\cos\phi\hat{\rho} - mg\sin\phi\hat{\phi}.$$

Descomponiendo esta ecuación para cada eje, de $\hat{\phi}$ se obtiene la expresión del ángulo en función del tiempo:

$$\phi(t) = A\cos\omega t,$$

con $\omega = \sqrt{g/l}$ y A la amplitud de la oscilación que se calcula con las condiciones iniciales. De la ecuación en $\hat{\rho}$ nos queda la expresión:

$$ml\dot{\phi}^2 = T - mg\cos\phi,$$

reemplazando al expresión del ángulo,

$$T = mg\cos\left(A\cos\left(\omega t\right)\right) + ml(-\omega A\sin\left(\omega t\right))^2$$
$$\Rightarrow T \approx mg\left(1 - \frac{1}{2}A^2\cos^2\left(\omega t\right)\right) + ml\omega^2 A^2\sin^2\left(\omega t\right)$$
$$\Leftrightarrow T = mg + mgA^2\left(\sin^2\left(\omega t\right) - \frac{1}{2}\cos^2\left(\omega t\right)\right),$$

donde se utilizó que para ángulos pequeños $\cos x \approx 1 - x^2/2$.

Ahora, para calcular el promedio de la tensión, lo calculamos como:

$$\langle T\rangle = \frac{1}{P}\int_0^P T,$$

con $P = 2\pi/\omega$ el periodo de la oscilación. Entonces, nos queda:

$$\begin{aligned}
\langle T\rangle &= \frac{1}{P}\int_0^P mgdt + \frac{1}{P}\int_0^P mgA^2\left(\sin^2(\omega t) - \frac{1}{2}\cos^2(\omega t)\right)dt\\
&= mg + \frac{mgA^2}{P}\int_0^P\left(1-\cos^2(\omega t) - \frac{1}{2}\cos^2(\omega t)\right)dt\\
&= mg + \frac{mgA^2}{P}\int_0^P\left(1-\frac{3}{2}\cos^2(\omega t)\right)dt\\
&= mg + \frac{mgA^2}{P}\left(\int_0^P dt - \frac{3}{2}\int_0^P\cos^2(\omega t)dt\right)\\
&= mg + \frac{mgA^2}{P}\left(P - \frac{3}{2}\int_0^P\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt\right)\\
&= mg + \frac{mgA^2}{P}\left(P - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\int_0^P dt - \frac{1}{2}\int_0^P\cos(2\omega t)dt\right)\right)\\
&= mg + \frac{mgA^2}{P}\left(P - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}P - \cancelto{0}{\left.\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right|_0^T}\right)\right)\\
&= mg + \frac{mgA^2}{P}\left(P - \frac{3}{4}P\right)\\
&= mg + \frac{mgA^2}{4},
\end{aligned}$$

donde se cancela la evaluación del seno, ya que luego de 2 periodos vuelve a tomar el valor inicial.

Con esto obtenemos que $\langle T\rangle > mg$, que tiene sentido, ya que mg sería la tensión si el péndulo se mantuviese quieto, pero como tiene movimiento tiene una contribución distinta de 0 de la componente horizontal.

$\boxed{\textbf{P2.-}}$

Sobre una superficie horizontal sin roce una partícula de masa m se mueve ligada a un punto fijo mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En el instante mostrado en la figura su velocidad tiene magnitud v_0 y es perpendicular al resorte, el cual se encuentra en su largo natural. Determine el valor de v_0 tal que la máxima longitud que el resorte alcance sea $4l_0$. Determine también la máxima y mínima rapidez de la partícula en el movimiento resultante.

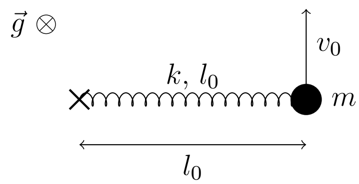

Figura 1: Problema 2

Respuesta

Para este problema usamos la conservación de la energía mecánica, ya que no hay fuerzas disipativas, además tenemos que se conserva el momentum angular, debido a que no hay fuerzas actuando en $\hat{\phi}$, así que usando coordenadas polares obtenemos que:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}(\rho^2\dot{\phi})}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \rho^2\dot{\phi} = \text{constante}.$$

Como en un primer instante el resorte se encuentra en su largo natural, solo hay energía cinética dada por la velocidad v_0,

$$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2,$$

y por conservación del momentum angular tenemos que $\rho^2\dot{\phi} = l_0v_0$.

Para este caso, la energía mecánica de forma general está dada, en coordenadas polares, por:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2) + \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2.$$

Sabemos que en el momento en el que el resorte alcance su máxima elongación, la masa se detiene en el eje radial (deja de alejarse), o sea, $\dot{r} = 0$, utilizando que la posición en este caso es $4l_0$ y utilizando la conservación del momentum angular, obtenemos que la energía es:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{l_0v_0}{4l_0}\right)^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2,$$

que tiene que ser igual a la energía inicial,

$$\frac{1}{32}m{v_0}^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$
$$\Rightarrow {v_0}^2 = \frac{48}{5}\frac{k}{m}{l_0}^2.$$

Para calcular la velocidad máxima del movimiento pensamos en que cuando se conserva la energía total se genera un equilibrio entre la energía cinética y la potencial (sumadas deben dar E), entonces la energía cinética (la velocidad) alcanza su máximo valor cuando la energía potencial es 0, en este caso eso sucede cuando el resorte está en su largo natural donde sabemos que la velocidad es v_0,

$$\Rightarrow v_{\text{máx}} = v_0.$$

Siguiendo el mismo razonamiento, la energía cinética toma su valor mínimo cuando la potencial alcanza su valor máximo, que para la velocidad v_0 calculada, la elongación máxima es $4l_0$, así que ocupamos que la energía total inicial es igual a la energía mecánica cuando la velocidad es mínima,

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_{mín}}^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2$$
$$\Rightarrow {v_{mín}}^2 = \frac{3}{5}\frac{k}{m}{l_0}^2$$

P3.-

Un bloque puntual de masa M se encuentra sobre una superficie inclinada con un ángulo $\alpha = 30°$ respecto de la horizontal y ligado mediante un resorte ideal de largo natural l_0 a un punto fijo O.

1. Sin considerar roce, se observa que el bloque se mantiene en reposo en $x = l_0/2$. Determine el valor de la constante elástica del resorte en función de los datos del problema.
2. Ahora, considerando un roce estático entre el bloque y la superficie con coeficiente $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, determine el rango de la coordenada x en el que el bloque se mantiene quieto.
3. Considerando roce cinético μ_c, si en $t = 0$ el bloque se libera desde $x = 0$, determine el tiempo T en el que el bloque se detiene por primera vez, ¿este tiempo depende del roce con la superficie?

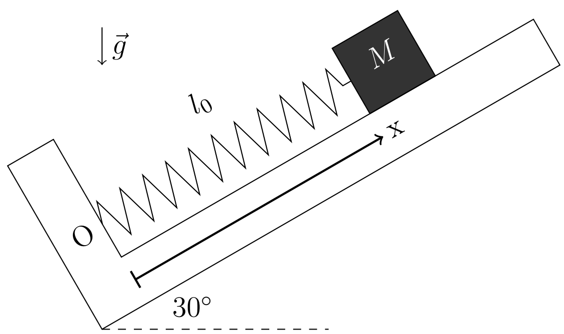

Figura 2: Problema 3

Respuesta

Utilizando un sistema de coordenadas cartesiano inclinado y con origen en el punto O, obtenemos que para que el bloque esté en reposo se debe igualar la fuerza del resorte con la de la gravedad en el eje x,

$$m\ddot{x}\Big|_{x=l_0/2} = F_r - mg\sin\alpha = 0$$
$$\Leftrightarrow -k\left(\frac{l_0}{2} - l_0\right) = mg\sin\alpha$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{2mg\sin\alpha}{l_0} = \frac{mg}{l_0},$$

con lo que conseguimos la constante elástica de nuestro resorte.

Ahora, sabemos que la fuerza del roce estático varía según la fuerza que se le aplique a la masa, pero tiene un límite superior igual a μN, con N la fuerza normal aplicada sobre la masa. Como no hay movimiento en el eje y, sabemos que la normal es igual a la componente del peso en este eje $N = mg\cos\alpha = \sqrt{3}mg/2$. Así que ahora tenemos 3 fuerzas en el eje x, entonces la suma (en valor absoluto, ya que nos interesa la magnitud) de la fuerza del resorte y de la componente del peso debe ser menor a μN para encontrar el rango de la coordenada x,

$$\begin{aligned}
&|F_r - mg\sin\alpha| \leq \mu N \\
\Leftrightarrow\ & |-k(x-l_0) - mg\sin\alpha| \leq \mu mg\cos\alpha \\
\Leftrightarrow\ & \left|-\frac{mg}{l_0}(x-l_0) - \frac{mg}{2}\right| \leq \frac{mg}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{mg}{l_0}\left|x - \frac{l_0}{2}\right| \leq \frac{mg}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \left|x - \frac{l_0}{2}\right| \leq \frac{l_0}{4} \\
\Rightarrow\ & \frac{l_0}{4} \leq x \leq \frac{3l_0}{4}
\end{aligned}$$

Para el último ítem escribimos la ecuación de movimiento en el eje x:

$$m\ddot{x} = -k(x-l_0) - \frac{mg}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_c,$$

que es una EDO de la forma $m\ddot{x} = -Ax + B$, con A y B constantes, por lo que la *frecuencia angular* es la misma que si no tuviese la constante B, o sea, como el problema $m\ddot{x} = -k(x-l_0)$, donde la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{k/m}$. La masa intenta seguir un movimiento armónico simple, por lo que la primera vez que para es a la mitad del periodo P,

$$T = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{k/m}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{l_0}{g}},$$

por lo tanto, este tiempo no depende de la constante de fricción cinemático, en lo que si influye es en la posición a la que llega, que es menor mientrar mayor sea μ_c.