

Auxiliar 7

Diagramas de fase, ciclos límites y bifurcaciones

Profesor: Fernando Lund

Auxiliar: Javier Huenupi

Ayudante: P. Joaquín

P1.- Estabilidad 1D

Utilice diagramas de fase para encontrar los puntos fijos y estudiar su estabilidad, para los siguientes casos:

- a) $\dot{x} = f(x)$, con $f(x)$ una función cualquiera
- b) $\dot{x} = x^2 - 1$
- c) $\dot{x} = x - \cos x$

P2.- Bifurcaciones

Estudie cómo emergen puntos fijos y cómo cambia su estabilidad para los siguientes casos

- a) Saddle-Node: $\dot{x} = \mu + x^2$
- b) Saddle-Node: $\dot{x} = \mu - x - e^{-x}$
- c) Pitchfork: $\dot{x} = \mu x - x^3$

Para esto utilice diagramas de bifurcación y encuentre los valores de μ que generan la bifurcación en cada caso

P3.- Péndulo no lineal

Considere la EoM que describe un péndulo simple

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0.$$

Sin aproximar el término trigonométrico, separe la ecuación en dos EDOs de primer orden de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}$$

donde x, y **no son las coordenadas cartesianas del sistema**. Encuentre los equilibrios del sistema y el comportamiento en el espacio de fases para distintas condiciones iniciales.

P4.- Ciclo límite

Considere un problema donde la masa inercial m de una partícula es despreciable frente a los otros parámetros del problema. Estudie el sistema dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - \omega y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \omega x + \mu y - y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

donde ahora sí x, y son las coordenadas cartesianas de la partícula.

- a) Grafique el campo vectorial $(\dot{x}, \dot{y}) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, donde

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= \mu x - \omega y - x(x^2 + y^2) \\ f_2(x, y) &= \omega x + \mu y - y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

y analice las trayectorias que seguiría la partícula para distintas condiciones iniciales (x_0, y_0) ¿nota alguna tendencia?

- b) Con el análisis anterior, transforme este sistema cartesiano a uno en coordenadas polares con

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Analice el comportamiento de los equilibrios según r para los casos $\mu > 0$ y $\mu < 0$

- c) Concluya cuál es el valor de μ que genera la bifurcación
- d) Para el caso de existencia de ciclo límite (solución periódica a la que tiende el sistema), calcule el radio de este ciclo

Formulario

Estabilidad para multivariables

Sea un sistema de EDOs dado por la ecuación vectorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Sea \mathbf{x}_0 un punto fijo (de equilibrio), para analizar la estabilidad de este definimos $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\eta}$ y expandimos la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\eta})$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\boldsymbol{\eta} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\eta}^2) \\ &\approx D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\boldsymbol{\eta},\end{aligned}$$

donde $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ es la matriz Jacobiana

$$D\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Las estabilidades estarán dadas por la ecuación de autovalores

$$\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - I\lambda) = 0.$$

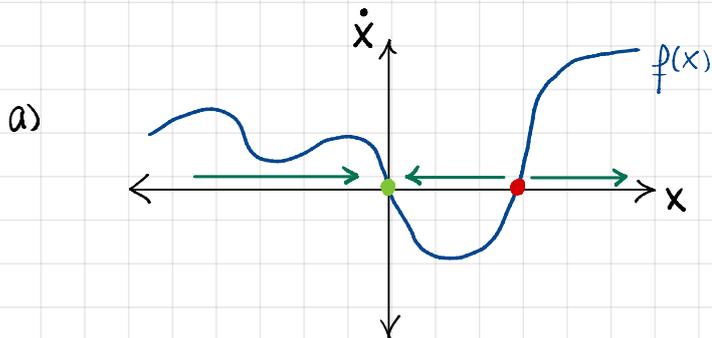
Para el caso de una variable, el análisis se reduce a analizar el signo de $f'(x_0)$ en

$$\dot{\eta}(t) = f'(x_0)\eta(t).$$

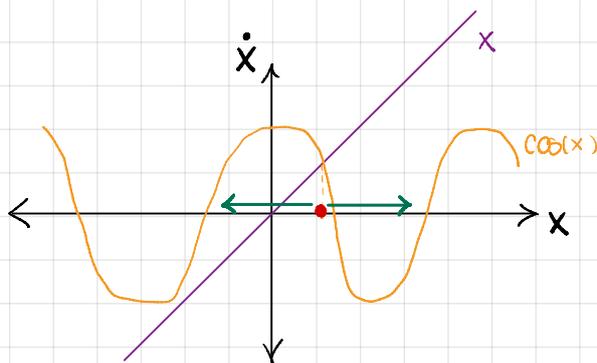
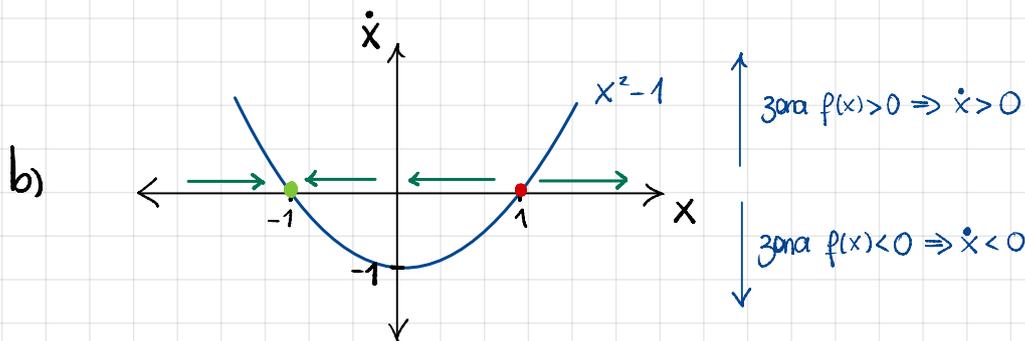
Auxiliar 7

P1

Empecemos con el caso general $\dot{x} = f(x)$



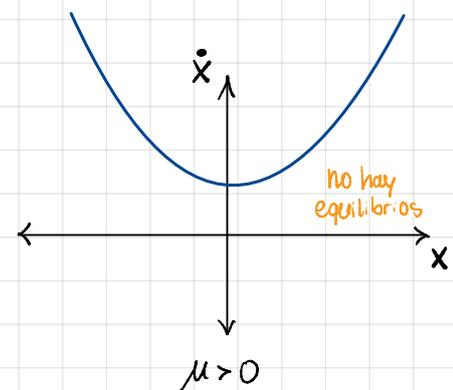
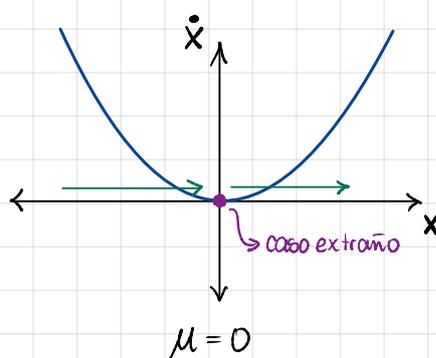
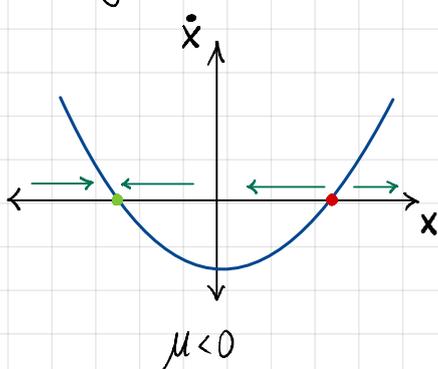
Los puntos fijos (o de equilibrio) están dados por $\dot{x} = 0$, o sea la ec algebraica $f(x) = 0$, que en un diagrama de fase es donde f corta el eje x .
La estabilidad de cada punto la definiremos según si las flechas verdes apuntan hacia el punto (estable) o desde el punto (inestable)



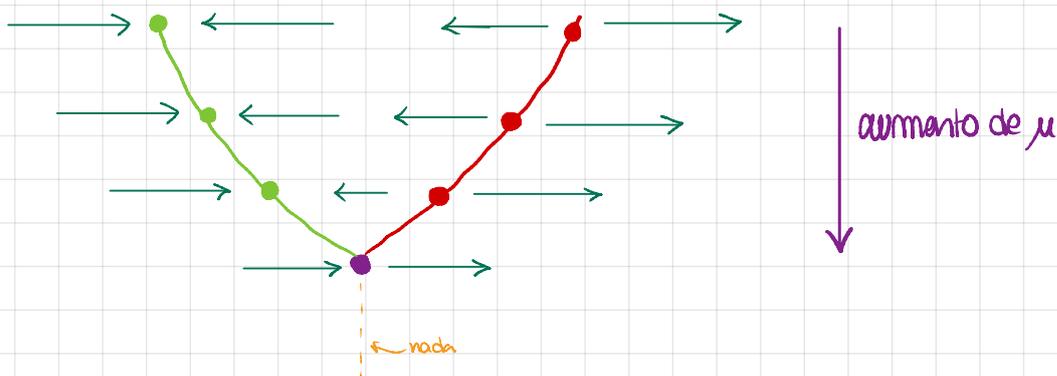
Este caso lo pudimos haber graficado con el computador, pero podemos hacer lo a mano graficando cada término por separado y ver cuando se cruzan, $f(x) = 0$, y para ver la estabilidad basta con identificar cuándo un término es más grande que el otro

P2

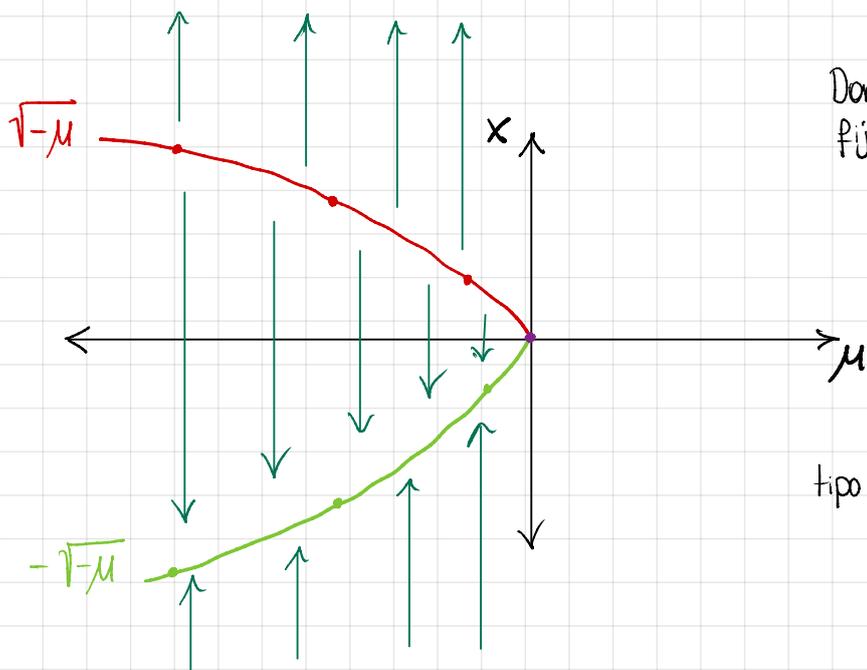
Siendo ocupando diagramas de fase (x, \dot{x}) , notamos que si tenemos $\dot{x} = f(x; \mu)$ con μ un parámetro (o varios parámetros) constante, al cambiar μ va a cambiar f y con ello los pts. de equilibrio x_0 y en algunos casos sus estabildades



por lo que pasamos de tener 2 ptos. de equilibrio, a solo 1 pto. de equilibrio y luego a ninguno



Esto en un diagrama de bifurcación (μ, x) se ve como



Donde las curvas están dadas por la ec de puntos fijo

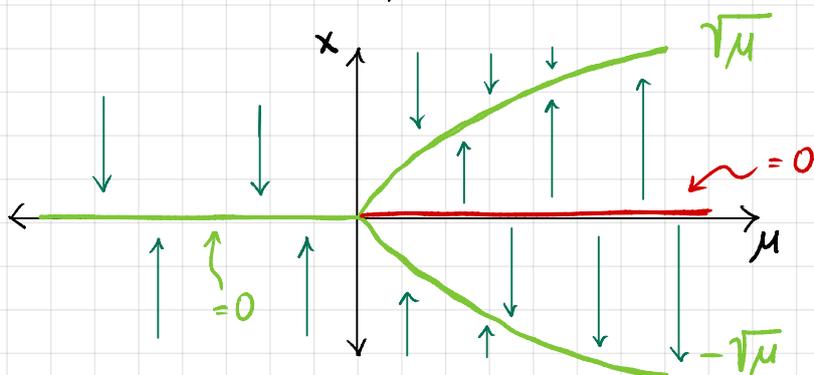
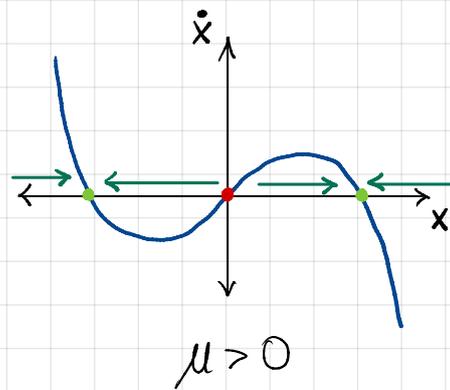
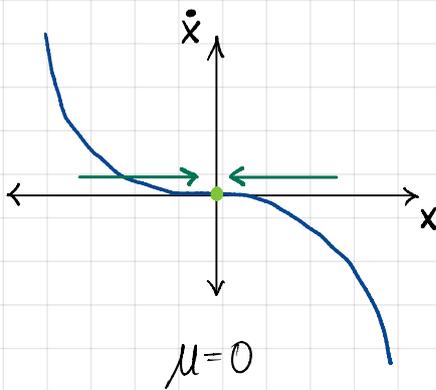
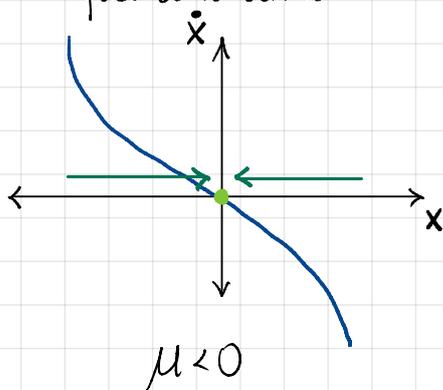
$$\mu + x_0^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_0 = \pm \sqrt{-\mu}$$

que es claro que las raíces existen solo para $\mu < 0$.

Una ecuación de la forma $\dot{x} = \mu + x^2$

se dice que presenta una bifurcación del tipo Saddle-Node

c) Para la bifurcación de Pitchfork \curvearrowright tenemos la EDO $\dot{x} = \mu x - x^3$ que en un diagrama de fase se ve como



$$\mu x_0 - x_0^3 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_0 = 0 \vee x_0 = \pm \sqrt{\mu}$$

P3

Tenemos la EDO $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$, donde si nombramos $x = \theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{\theta}$ y si nombramos $y = \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{\theta}$ que por la EoM sería $\dot{y} = -\omega_0^2 \sin(x)$, así que armamos el sist. a primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y & &= f_1(x,y) \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 \sin(x) & &= f_2(x,y) \end{aligned}$$

y buscamos los ptes. fijos imponiendo $\dot{x} = \dot{y} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y_0 \stackrel{!}{=} 0 \wedge -\omega_0^2 \sin(x_0) \stackrel{!}{=} 0$

$$\therefore x_0 = n\pi \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } y_0 = 0$$

Para analizar la estabilidad calculemos la matriz Jacobiana

$$\triangleright \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \quad \triangleright \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 \quad \triangleright \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\omega_0^2 \cos(x) \quad \therefore D\vec{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 \cos(n\pi) & 0 \end{pmatrix}$$

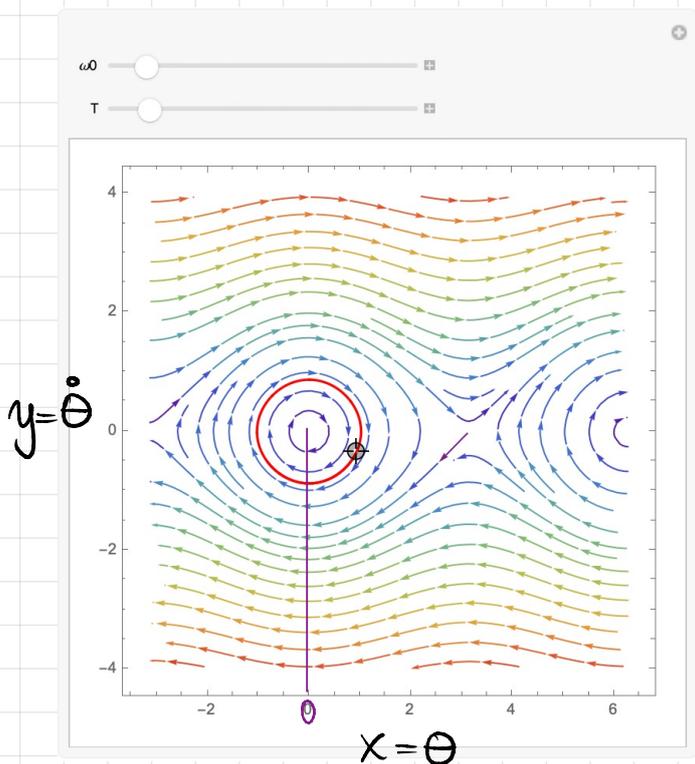
calculemos la función de autovalores

$$\det(D\vec{f}(x_0, y_0) - \mathbb{1}_{2 \times 2} \lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 \cos(n\pi) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega_0^2 \cos(n\pi) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \pm \omega_0 \sqrt{-\cos(n\pi)}$$

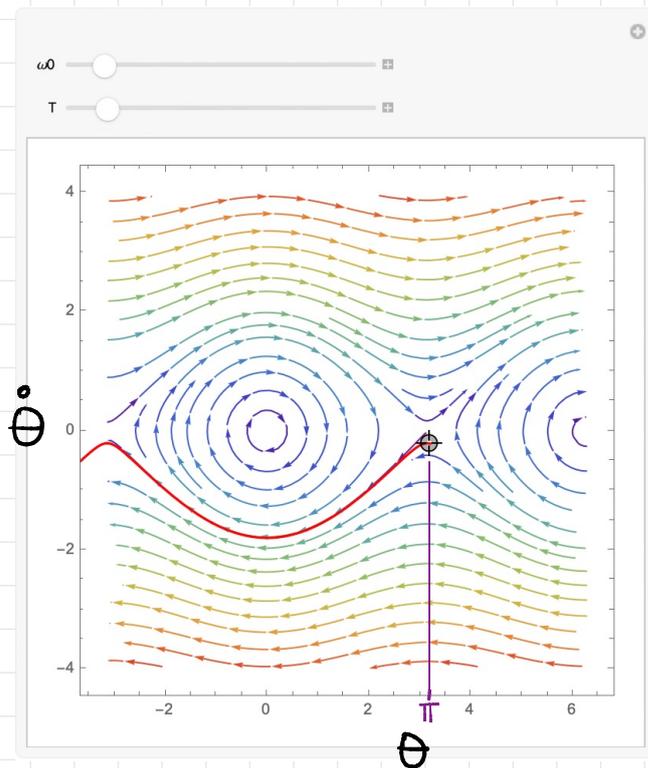
Para el caso n par $\Rightarrow \lambda_{\pm}$ son imaginarios puros conjugados \Rightarrow soluciones oscilatorias para $x(t)$ y $y(t)$, mientras que si n es impar $\Rightarrow \lambda_{\pm}$ son reales, uno positivo y otro negativo por lo que una de las soluciones decae a 0 en $t \rightarrow \infty$ y la otra explota, lo que indicaría puntos inestables

puntos estables

Veamos esto gráficamente



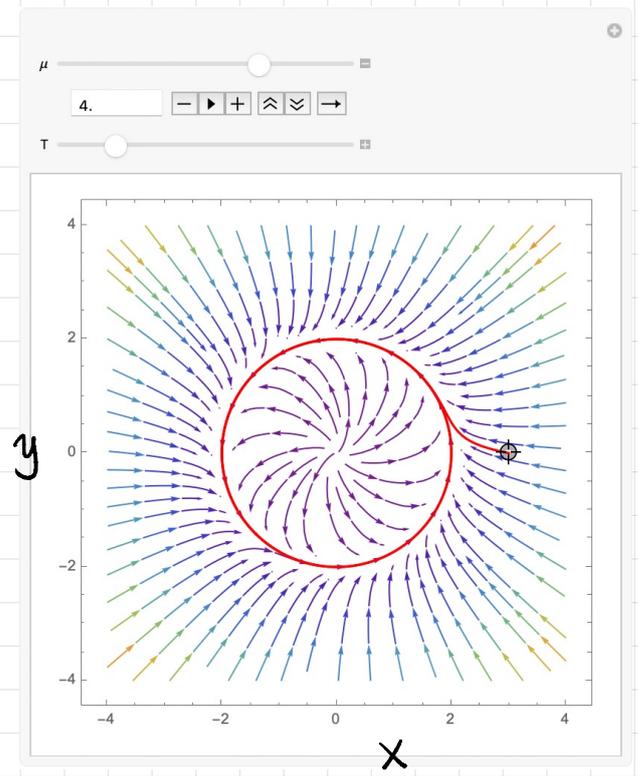
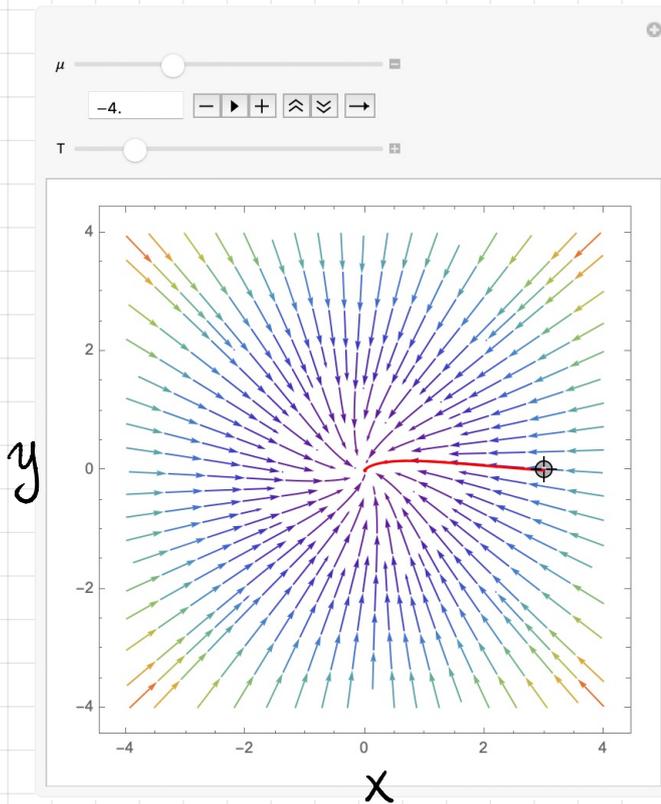
Equilibrio estable



Equilibrio inestable

P4

a) Graficamos el campo vectorial $(\dot{x}, \dot{y}) = (f_1(x, y; \mu, \omega=1), f_2(x, y; \mu, \omega=1))$



Notamos que para $\mu = -4$ la trayectoria tiende a $(0,0)$ sin importar la C.I. (x_0, y_0) , mientras que para $\mu = 4$ la trayectoria tiende a un anillo, sin importar si la C.I. está dentro (no graficada) o fuera del anillo (imagen de la derecha).

b) Debido a que el anillo se ve bien circular, intentemos escribir (x, y) en coord. polares (r, θ) . Tenemos el est.

$$\dot{x} = \mu x - \omega y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = \omega x + \mu y - y(x^2 + y^2)$$

si tomamos $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ^ $\tan \theta = y/x$

$$\square \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} (\mu x - \omega y - x(x^2 + y^2)) + \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} (\omega x + \mu y - y(x^2 + y^2))$$

$$= \frac{x}{r} (\mu r \cos \theta - \omega r \sin \theta - r \cos \theta \cdot r^2) + \frac{y}{r} (\omega r \cos \theta + \mu r \sin \theta - r \sin \theta \cdot r^2)$$

$$= \mu r \cos^2 \theta - \omega r \cos \theta \sin \theta - r^3 \cos^2 \theta + \omega r \cos \theta \sin \theta + \mu r \sin^2 \theta - r^3 \sin^2 \theta$$

$$= \mu r - r^3 = r(\mu - r^2)$$

$$\square \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial(\arctan(y/x))}{\partial x} (\mu x - \omega y - x(x^2 + y^2)) + \frac{\partial(\arctan(y/x))}{\partial y} (\omega x + \mu y - y(x^2 + y^2))$$

$$= -\frac{y}{r^2} (\mu r \cos\theta - \omega r \sin\theta - r \cos\theta \cdot r^2) + \frac{x}{r^2} (\omega r \cos\theta + \mu r \sin\theta - r \sin\theta \cdot r^2)$$

$$= -\mu \cos\theta \sin\theta + \omega \sin^2\theta + r^2 \cos\theta \sin\theta + \omega \cos^2\theta + \mu \cos\theta \sin\theta - r^2 \cos\theta \sin\theta$$

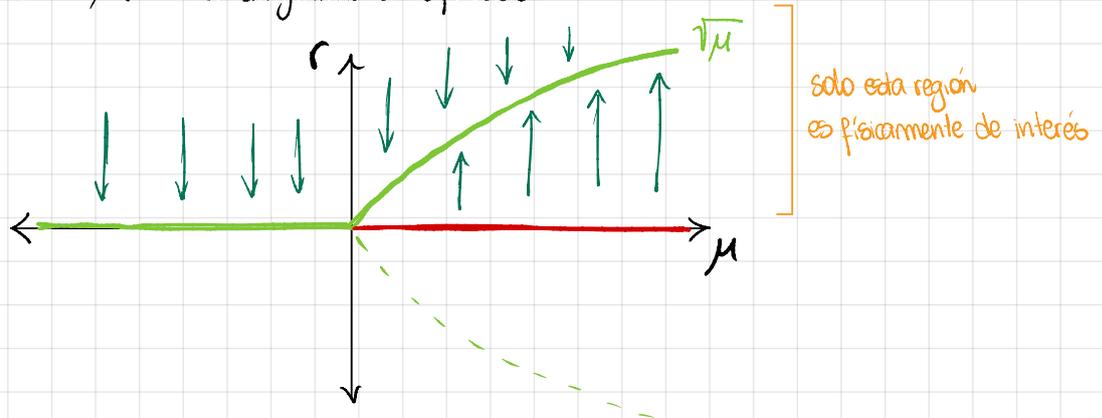
$$= \omega$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = r(\mu - r^2) \quad (1) \quad \wedge \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (2)$$

Notamos de (2) que la partícula se mueve con vel. angular cte., mientras que (1) tiene la forma de una bifurcación de pitchfork

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

O sea, que para $\mu < 0$ tenemos solo un equilibrio y estable en $r=0$ (imagen de la izquierda), mientras que para $\mu > 0$ este $r=0$ pasa a ser un equilibrio inestable y surgen dos equil. estables, $r = \pm\sqrt{\mu}$, donde como $r > 0$ realmente solo formamos $r = +\sqrt{\mu}$. En un diagrama de bifurcación



c) Es claro que μ es el parámetro de bifurcación y genera el cambio abrupto del sist. en $\mu=0$, ya que se pasa de tener 1 equilibrio estable a 1 equilibrio estable (distinto) y 1 inestable

d) El radio del ciclo límite sería $r = \sqrt{\mu}$ constante