Auxiliar 7

Dinámica IV

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi

P1.-

Considere un tambor de radio R cuya base se encuentra en posición horizontal. En el fondo del tambor se lanza una partícula con velocidad v_0 a lo largo de la pared del mismo. La partícula no tiene roce con la base del tambor, pero tiene **roce cinético con la pared** (con coeficiente de roce cinético igual a μ_c)

a) ¿Se detiene en algún momento la partícula?, ¿en cuánto tiempo?

b) Determine al rapidez de la partícula justo cuando ha dado una vuelta completa deslizándose a lo largo de la pared del tambor

c) Determine el tiempo que tarda la partícula en completar esa primera vuelta

Repita el cálculo suponiendo que la partícula **no tiene roce con la pared del tambor**, pero tiene **roce cinético con la base del mismo** (con coeficiente de roce cinético igual a μ_c).

d) ¿Se detiene en algún momento la partícula?, ¿en cuánto tiempo?

e) Determine la rapidez de la partícula justo cuando ha dado una vuelta completa deslizándose a lo largo de la pared del tambor

f) Determine el tiempo que tarda la partícula en completar esa primera vuelta

Indicación: Considere que la partícula nunca se separa de la pared lateral, además solo se mueve en la base del cilindro.

Formulario

Coordenadas cilíndricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
&= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}
\end{aligned}
$$

Roce cinético

El roce cinético solo se ejerce sobre la partícula cuando esta está en movimiento. Es proporcional a la normal **de la superficie que ejerce el roce**, de la forma

$$\vec{F}_{\text{cin}} = -|\vec{N}|\,\mu_c\hat{t}\,,$$

donde $\vec{N}$ es la normal que ejerce la superficie rugosa, μ_c su coeficiente de roce cinético y $\hat{t}$ el vector unitario tangente a la trayectoria.
Como pueden ver en la fórmula, esta fuerza **se opone al movimiento de la partícula**.

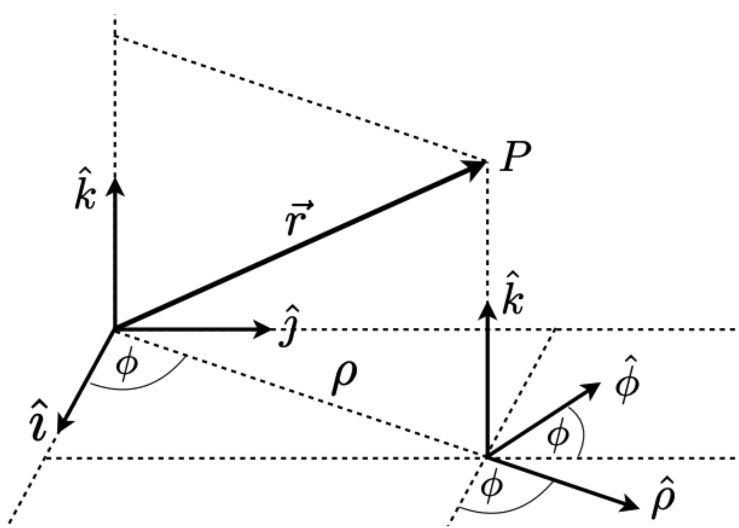
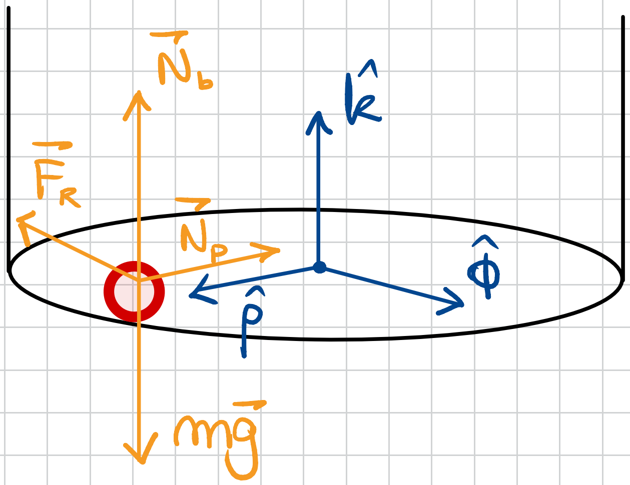


Figura 1: Coordenadas cilíndricas

Auxiliar 7

P1



a) Ocuparemos coordenadas cilíndricas, donde la aceleración sería

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$
$$= -R\dot{\phi}^2\hat{\rho} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$$

Las fuerzas actuando sobre m son:

- Peso: $m\vec{g} = -mg\hat{k}$
- Normal pared: $\vec{N}_p = -N_p\hat{\rho}$
- Normal base: $\vec{N}_b = N_b\hat{k}$
- Roce cinético: $\vec{F}_R = -|\vec{N}_p|\mu_c\hat{t} = -N_p\mu_c\hat{\phi}$

por lo que la EoM vectorial sería

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow -mR\dot{\phi}^2\hat{\rho} + mR\ddot{\phi}\hat{\phi} = -mg\hat{k} - N_p\hat{\rho} + N_b\hat{k} - N_p\mu_c\hat{\phi}$$

$\hat{\rho}$) $-mR\dot{\phi}^2 = -N_p$

$\hat{\phi}$) $mR\ddot{\phi} = -N_p\mu_c$

$\hat{k}$) $0 = -mg + N_b$

Notamos que usando $\hat{\rho}$) y $\hat{\phi}$) podemos eliminar N_p (que no conocemos)

$$\Rightarrow \cancel{mR}\ddot{\phi} = -\cancel{mR}\dot{\phi}^2\mu_c \qquad (1)$$

que podemos integrar

$$\Rightarrow \frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}^2} = -\mu_c\, dt \qquad \Big/ \int_{t=0}^{t}$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\phi}(t=0)=\dot{\phi}_0}^{\dot{\phi}(t)} \frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}^2} = -\mu_c \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\dot{\phi}}\Big|_{\dot{\phi}_0}^{\dot{\phi}(t)} = -\mu_c t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\dot\phi} = \mu_c t + \frac{1}{\dot\phi_0}$$

$$\Leftrightarrow \dot\phi(t) = \frac{\dot\phi_0}{\mu_c \dot\phi_0 t + 1}$$

donde $\dot\phi_0$ está dado por C.I.

$$v_0 = R\dot\phi_0$$

$$\Rightarrow \dot\phi(t) = \frac{v_0}{\mu_c v_0 t + R} \quad (2)$$

por lo que se detendría solo en $t \to \infty$

b) Integramos (1) con truco de mecánica

$$\dot\phi \frac{d\dot\phi}{d\phi} = -\mu_c \dot\phi^2 \quad / \int_{t_0}^{t} d\phi$$

$$\Rightarrow \int_{\dot\phi_0}^{\dot\phi} \frac{d\dot\phi}{\dot\phi} = -\mu_c \int_0^{\phi} d\phi$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\dot\phi}{\dot\phi_0}\right) = -\mu_c \phi$$

$$\Leftrightarrow \dot\phi(\phi) = \frac{v_0}{R} e^{-\mu_c \phi}$$

así que en $\phi = 2\pi \quad \Rightarrow R\dot\phi(\phi=2\pi) = v_0 e^{-2\pi\mu_c} = v(\phi=2\pi)$

c) Usamos este último resultado en (2)

$$\Rightarrow \frac{v_0}{R} e^{-2\pi\mu_c} = \frac{v_0}{\mu_c v_0 t^* + R}$$

$$\Leftrightarrow \mu_c v_0 t^* + R = R e^{2\pi\mu_c}$$

$$\Leftrightarrow t^* = \frac{R}{v_0 \mu_c}\left(e^{2\pi\mu_c} - 1\right)$$

d) Ahora, cuando la base es la superficie que ejerce el roce, en la EoM vectorial solo hay que cambiar el roce cinético como

$$\vec F_R = -|\vec N_b| \mu_c \hat t = -N_b \mu_c \hat\phi$$

así que las EoMs escalares serían

$$\hat{\rho})\ -mR\dot{\phi}^2 = -N_p$$

$$\hat{\phi})\ mR\ddot{\phi} = -N_b\mu_c$$

$$\hat{k})\ 0 = -mg + N_b$$

Reemplazando N_b de $\hat{k})$ en $\hat{\phi})$

$$\Rightarrow \cancel{m}R\ddot{\phi} = -\cancel{m}g\mu_c \qquad (3)$$

que podemos integrar

$$\frac{d\dot{\phi}}{dt} = -\frac{g}{R}\mu_c \quad \Big/ \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\phi}_0}^{\dot{\phi}} d\dot{\phi} = -\frac{g}{R}\mu_c \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \dot{\phi}(t) = \dot{\phi}_0 - \frac{g}{R}\mu_c t \qquad (4)$$

que se hace 0 cuando

$$\dot{\phi}(t=t') \overset{!}{=} 0 = \frac{v_0}{R} - \frac{g}{R}\mu_c t'$$

$$\Rightarrow t' = \frac{v_0}{g\mu_c}$$

que ahora es un tiempo finito

e) Integramos (3), pero ahora con truco de mecánica

$$\Rightarrow \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -g\mu_c \quad \Big/ \int_0^t d\phi$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\phi}_0}^{\dot{\phi}} \dot{\phi}\, d\dot{\phi} = -g\mu_c \int_0^{\phi} d\phi$$

$$\Leftrightarrow \dot{\phi}^2 - \dot{\phi}_0^2 = -2g\mu_c\phi$$

$$\Leftrightarrow \dot{\phi}(\phi) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} - 2g\mu_c\phi}$$

que al dar una vuelta vale

$$R\dot{\phi}(\phi=2\pi) \equiv v(\phi=2\pi) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} - 4\pi g\mu_c}$$

f) Y reemplazando esto en (4)

$$\dot{\phi}(\phi=2\pi) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} - 4\pi g\mu_c} = \frac{v_0}{R} - \frac{g}{R}\mu_c \bar{t}$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \frac{v_0}{g\mu_c} - \frac{R}{g\mu_c}\sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} - 4\pi g\mu_c}$$