Auxiliar 7

Dinámica

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.- Control 1 2022-2

Una bolita de masa m se desliza sin roce por el interior de una copa. La superficie de la copa está descrita por la función $z = f(\rho)$ donde z y ρ son coordenadas cilíndricas y el eje vertical $\hat{k}$ es el eje de revolución de la copa (ver Figura). Se observa que la bolita se mueve describiendo **un círculo** y manteniendo **constante su altura**.

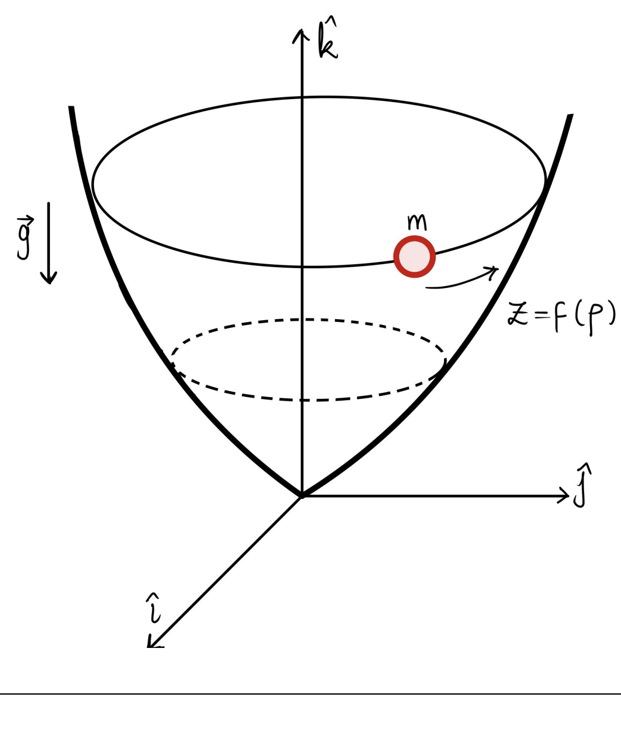
a) Dibuje el DCL de la bolita

b) Escriba las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas

c) Determine la velocidad angular ω de la bolita en términos de $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\rho}$, el radio del círculo y otras constantes del problema

d) Considere los casos de una copa de martini ($z_m = \rho$) y en una de vino ($z_v = H\left(\frac{\rho}{R}\right)^2$). Determine la velocidad angular ω en cada caso

e) Si la altura de la bolita en ambas copas es la misma, señale en cuál de ellas la bolita tiene una mayor velocidad angular o si esto depende de alguna condición de los parámetros



P2.-

Considere un tambor de radio R cuya base se encuentra en posición horizontal. En el fondo del tambor se lanza una partícula con velocidad v_0 a lo largo de la pared del mismo. La partícula no tiene roce con la base del tambor, pero tiene roce cinético con la pared (con coeficiente de roce cinético igual a μ_c)

a) ¿Se detiene en algún momento la partícula?, ¿en cuánto tiempo?

b) Determine al rapidez de la partícula justo cuando ha dado una vuelta completa deslizándose a lo largo de la pared del tambor

c) Determine el tiempo que tarda la partícula en completar esa primera vuelta

Repita el cálculo suponiendo que la partícula no tiene roce con la pared del tambor, pero tiene roce cinético con la base del mismo (con coeficiente de roce cinético igual a μ_c).

d) ¿Se detiene en algún momento la partícula?, ¿en cuánto tiempo?

e) Determine la rapidez de la partícula justo cuando ha dado una vuelta completa deslizándose a lo largo de la pared del tambor

f) Determine el tiempo que tarda la partícula en completar esa primera vuelta

Indicación: Considere que la partícula nunca se separa de la pared lateral, además solo se mueve en la base del cilindro.

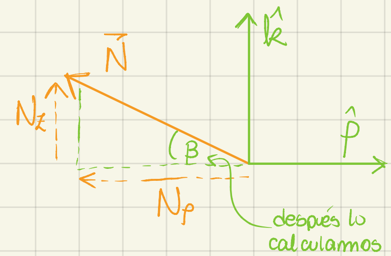
Auxiliar 7

P1

Notamos que solo tenemos dos fuerzas actuando sobre la partícula: la normal **perpendicular** a la superficie y el peso en $-\hat{k}$

Por enunciado, debemos elegir un sist. de coord. cilíndricas con origen en la base de la copa

Toca descomponer las fuerzas



- Peso: $\vec{F}_p = -mg\hat{k}$
- Normal: $\vec{N} = N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k}$

Y para expresar la aceleración (en cilíndricas) usamos que

- $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$
- $\dot{z} = \ddot{z} = 0$

así que tendríamos

el radio de una órbita en específico

$$\vec{a} = (\cancel{\ddot{\rho}}^{\,0} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} + \cancel{\ddot{z}}^{\,0}\hat{k} = -\rho\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi}$$

donde ocupamos la expresión con derivada en $\hat{\phi}$ porque no hay fuerzas en $\hat{\phi}$ y por lo tanto hay conservación del momentum angular

Reemplazando en segunda Ley de Newton, $m\vec{a} = \sum\vec{F}$

$$-m\rho\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} = -mg\hat{k} + N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k}$$

con lo que conseguimos la **ec. de movimiento vectorial**. Obtengamos las ecs. escalares

$$\hat{\rho})\quad -m\rho\dot{\phi}^2 = N_\rho$$

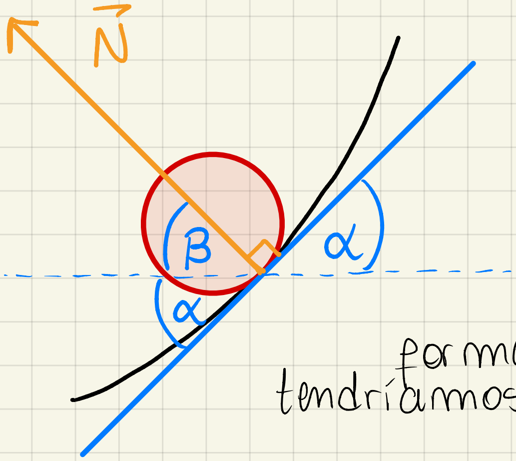
$$\hat{\phi})\quad \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) = 0$$

$$\hat{k})\quad 0 = -mg + N_z \Rightarrow N_z = mg$$

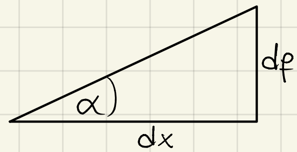
Donde, recordar que ρ es el radio de la órbita que seguiría la partícula.
Ahora, no conocemos la expresión de N_ρ como para despejar $\dot{\phi}$ de $\hat{\rho})$, por lo que

debemos buscar la expresión de esta normal.

Notamos que en $\hat{\rho})$ tenemos la normal en $\hat{\rho}$, pero como sucede siempre, no sabemos su expresión a priori (no hay una fórmula general para la normal, depende del problema), pero geométricamente podemos ver que N_ρ y N_z vienen de la misma normal, por lo que están relacionadas.



Por cálculo diferencial tenemos que la pendiente en un punto x de una curva $f(x)$ es



$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \tan(\alpha)$$

y esta pendiente es igual a la tangente del ángulo formado con la horizontal. Así que en este problema tendríamos que

$$\tan\alpha = \frac{df(\rho)}{d\rho} = \frac{dz}{d\rho}$$

y tenemos que $\tan\alpha = \tan(\pi/2 - \beta) = \dfrac{1}{\tan\beta}$, por lo que las normales serían

$$\bar{N} = N_\rho \hat{\rho} + N_z \hat{k} \longrightarrow N_\rho = -N\cos\beta \quad \wedge \quad N_z = N\sin\beta$$

y como $\tan = \sin/\cos \Rightarrow \dfrac{1}{\tan\beta} = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} = -\dfrac{N_\rho/N}{N_z/N} = -\dfrac{N_\rho}{N_z}$

$$\therefore N_\rho = -\frac{N_z}{\tan\beta} = -N_z \frac{dz}{d\rho} = -mg\frac{dz}{d\rho} \quad \text{por } \hat{k})$$

Ahora si, reemplazando en $\hat{\rho})$

$$\Rightarrow -m\rho\dot{\phi}^2 = -mg\frac{dz}{d\rho}$$

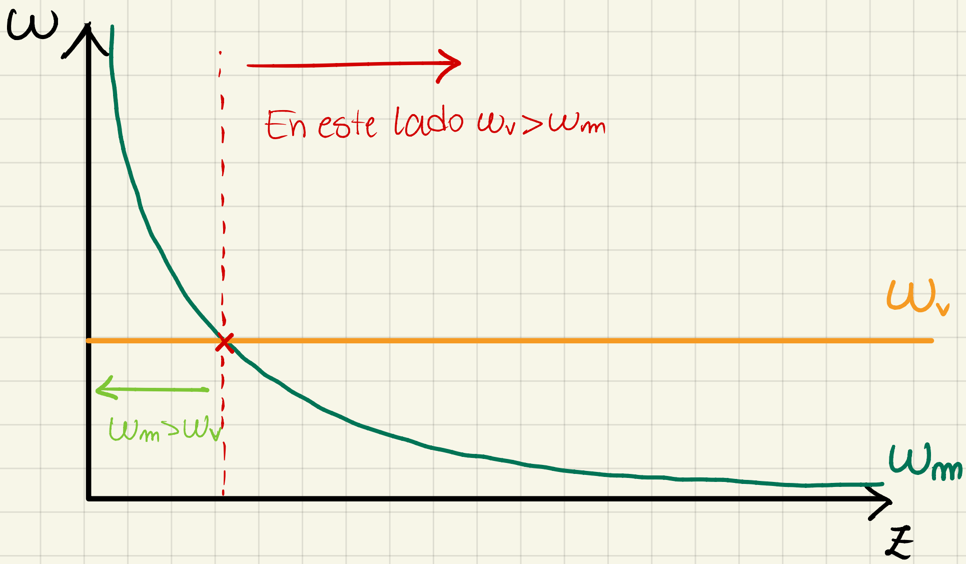
$$\Leftrightarrow \dot{\phi}(\rho) = \boxed{\sqrt{\frac{g}{\rho}\frac{dz}{d\rho}} \equiv \omega}$$

Reemplazando en ambos casos

- Martini $(z_m = \rho)$: $\dfrac{dz_m}{d\rho} = \dfrac{d\rho}{d\rho} = 1 \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\dfrac{g}{\rho}}$

▫ Vino ($z_v = H(\rho/R)^2$): $\frac{dz_v}{d\rho} = 2H\frac{\rho}{R^2} \Rightarrow \omega_v = \sqrt{\frac{g}{\rho}\,\frac{2H\rho}{R^2}} = \sqrt{\frac{2Hg}{R^2}}$

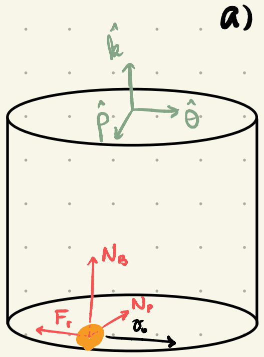
Para saber cuál tendría mayor velocidand angular, habría que saber la altura en específico, ya que para una áltura muy grande $\omega_m \to 0$ (recordar $z_m = \rho$), mientras que ω_v es constante para cualquier altura



P2

$\star$ Aquí use θ como ϕ, es notación

a) Usamos coord. cilíndricas. Las fuerzas involucradas son: el peso en $-\hat{k}$, la normal de la base en $\hat{k}$, la normal de la pared en $-\hat{\rho}$ y la fuerza de roce cinético en $-\hat{\theta}$



$$\Rightarrow m((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\hat{\theta}+\ddot{z}\hat{k})=-mg\hat{k}+N_B\hat{k}-N_p\hat{\rho}-N_p\mu_c\hat{\theta}$$

donde $\ddot{\rho}=\dot{\rho}=\ddot{z}=0 \wedge \rho=R$, por lo que las ecs. escalares quedan como:

$$\hat{\rho})\quad -mR\dot{\theta}^2=-N_p \quad (1)$$
$$\hat{\theta})\quad mR\ddot{\theta}=-N_p\mu_c \quad (2)$$
$$\hat{k})\quad 0=-mg+N_B \quad (3)$$

Reemplazando (1) en (2), se tiene:

$$\cancel{mR}\ddot{\theta}=-\cancel{mR}\dot{\theta}^2\mu_c$$
$$\Leftrightarrow \cancel{\dot{\theta}}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}=-\dot{\theta}^{\cancel{2}}\mu_c \quad /\int d\theta$$
$$\Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}}\frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}}=-\mu_c\int_0^{\theta}d\theta$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_0}\right)=-\mu_c\theta$$

donde se tiene $v_0=R\dot{\theta}_0$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{R\dot{\theta}}{v_0}\right)=-\mu_c\theta$$
$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(\theta)=\frac{v_0}{R}e^{-\mu_c\theta} \quad (4)$$
$$\Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt}=\frac{v_0}{R}e^{-\mu_c\theta} \quad /\int dt$$
$$\Rightarrow \int_0^{\theta}e^{\mu_c\theta}d\theta=\frac{v_0}{R}\int_0^t dt$$
$$\Leftrightarrow \left.\frac{e^{\mu_c\theta}}{\mu_c}\right|_0^{\theta}=\frac{v_0 t}{R}$$
$$\Leftrightarrow e^{\mu_c\theta}-1=\frac{\mu_c v_0 t}{R}$$
$$\Rightarrow \theta(t)=\frac{1}{\mu_c}\ln\left(\frac{\mu_c v_0 t}{R}+1\right) \quad (5)$$

La partícula se detiene si $\dot{\theta}=0$, de (4) vemos que esto ocurre cuando $\theta\to\infty$ y de (5) sabemos que esto se tiene para $t\to\infty$

b) La partícula da la vuelta cuando $\theta=2\pi$, reemplazando en (4) tenemos

$$\dot{\theta}(\theta=2\pi)=\frac{v_0}{R}e^{-2\pi\mu_c} \Rightarrow v(\theta=2\pi)=v_0 e^{-2\pi\mu_c}$$

c) Imponemos $\theta=2\pi$ en (5)

$$\Rightarrow 2\pi=\frac{1}{\mu_c}\ln\left(\frac{\mu_c v_0 t_1}{R}+1\right) \Rightarrow t_1=\frac{R}{\mu_c v_0}\left(e^{2\pi\mu_c}-1\right)$$

d) Ahora (2) pasaría a ser $mR\ddot{\theta} = -N_\theta \mu_c = -mg\mu_c$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\theta}\, d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{R}\mu_c \quad \Big/ \int d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{v_0/R}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = -\frac{g}{R}\mu_c \int_0^{\theta} d\theta$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 - \frac{v_0^2}{R^2} = -\frac{2g\mu_c\theta}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(\theta) = \sqrt{\frac{-2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}\right)^{-1/2} d\theta = dt \quad \Big/ \int$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta}\left(\frac{-2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}\right)^{-1/2} d\theta = \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{-R}{g\mu_c}\sqrt{\frac{-2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}}\,\Bigg|_0^{\theta} = t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{-2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}} - \frac{v_0}{R} = -\frac{g\mu_c}{R}t$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = \frac{-R}{2g\mu_c}\left[\left(\frac{-g\mu_c}{R}t + \frac{v_0}{R}\right)^2 - \frac{v_0^2}{R^2}\right] = \frac{-R}{2g\mu_c}\left[\left(\frac{g\mu_c}{R}\right)^2 t^2 - \frac{2g\mu_c v_0 t}{R^2}\right]$$

$$= -\frac{g\mu_c}{2R}t^2 + \frac{v_0}{R}t \quad (7)$$

También podemos integrar la ec de mov. c/r al tiempo

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{g}{R}\mu_c \quad \Big/ \int dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0/R}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta} = -\frac{g}{R}\mu_c \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = -\frac{g}{R}\mu_c t + \frac{v_0}{R}$$

Imponiendo que pare en $t_2 \Rightarrow 0 \overset{!}{=} -\frac{g\mu_c}{R}t_2 + \frac{v_0}{R} \Leftrightarrow t_2 = \frac{v_0}{g\mu_c}$

e) Usamos (6) con $\theta = 2\pi \Rightarrow \dot{\theta}(\theta = 2\pi) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{4\pi g\mu_c}{R}}$

f) Usamos (7) con $\theta = 2\pi \Rightarrow 2\pi \overset{!}{=} -\frac{g\mu_c}{2R}t_3^2 + \frac{v_0}{R}t_3$

$$\Leftrightarrow at_3^2 + bt_3 + c = 0, \text{ con } a = \frac{g\mu_c}{4\pi R},\ b = -\frac{v_0}{2\pi R} \text{ y } c = 1$$

$$\Rightarrow t_{3,1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\pi g\mu_c R}}{g\mu_c}$$

donde consideramos la primera solución ($\sqrt{v_0^2 - 4\pi g\mu_c R} < v_0$)

$$\Rightarrow t_3 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 4\pi g\mu_c R}}{g\mu_c}$$