Auxiliar 7

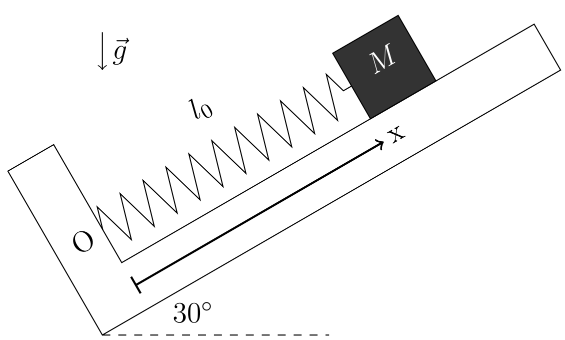
Dinámica con fuerzas específicas

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudante: Gerald Barnert

P1.-

Un bloque puntual de masa M se encuentra sobre una superficie inclinada con un ángulo $\alpha = 30°$ respecto de la horizontal y ligado mediante un resorte ideal de largo natural l_0 a un punto fijo O.

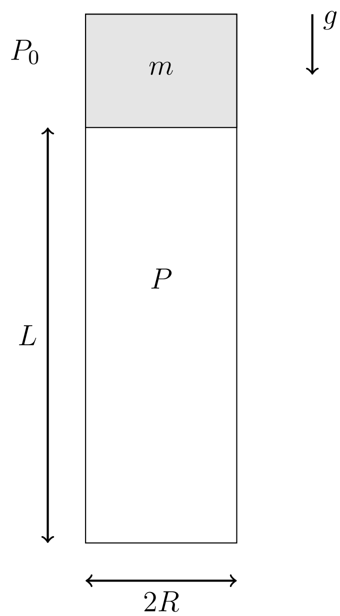
1. Sin considerar roce, se observa que el bloque se mantiene en reposo en $x = l_0/2$. Determine el valor de la constante elástica del resorte en función de los datos del problema.
2. Ahora, considerando un roce estático entre el bloque y la superficie con coeficiente $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, determine el rango de la coordenada x en el que el bloque se mantiene quieto.
3. Si en $t = 0$ el bloque se libera desde $x = 0$, determine el tiempo T en el que el bloque se detiene por primera vez, ¿este tiempo depende del roce con la superficie?



P2.-

Considere un tubo de radio interno R y largo L colocado en posición vertical, con su extremo inferior cerrado. En un cierto instante se suelta en el extremo superior del tubo (y desde el reposo) un émbolo de masa m, que se mueve hacia abajo por efecto de la gravedad, sin roce con las paredes del tubo, comprimiendo el aire encerrado por debajo de él. A medida que el aire de la cámara inferior se comprime, su presión P aumenta de modo tal que el producto entre la presión P y el volumen V de la cámara se mantiene constante ($PV = C_0$, con C_0 conocido). La presión atmosférica fuera del tubo es igual a P_0.

1. Escriba la ecuación de movimiento para el émbolo.
2. Determine a que altura el émbolo alcanza su máxima velocidad.
3. Determine una ecuación para encontrar la altura mínima que alcanza el émbolo sobre la base del tubo.



Pauta Auxiliar 7

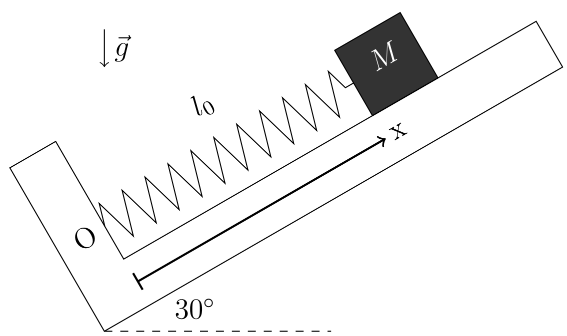
Dinámica con fuerzas específicas

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudantes: Gerald Barnert

P1.-

Un bloque puntual de masa M se encuentra sobre una superficie inclinada con un ángulo $\alpha = 30°$ respecto de la horizontal y ligado mediante un resorte ideal de largo natural l_0 a un punto fijo O.

1. Sin considerar roce, se observa que el bloque se mantiene en reposo en $x = l_0/2$. Determine el valor de la constante elástica del resorte en función de los datos del problema.
2. Ahora, considerando un roce estático entre el bloque y la superficie con coeficiente $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, determine el rango de la coordenada x en el que el bloque se mantiene quieto.
3. Considerando roce cinético μ_c, si en $t = 0$ el bloque se libera desde $x = 0$, determine el tiempo T en el que el bloque se detiene por primera vez, ¿este tiempo depende del roce con la superficie?



Respuesta

Utilizando un sistema de coordenadas cartesiano inclinado y con origen en el punto O, obtenemos que para que el bloque esté en reposo se debe igualar la fuerza del resorte con la de la gravedad en el eje x,

$$m\ddot{x}\Big|_{x=l_0/2} = F_r - mg\sin\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow -k\left(\frac{l_0}{2} - l_0\right) = mg\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2mg\sin\alpha}{l_0} = \frac{mg}{l_0},$$

donde $\sin 30° = 1/2$ y $\cos 30° = \sqrt{3}/2$, con lo que conseguimos la constante elástica de nuestro resorte.

Ahora, sabemos que la fuerza del roce estático varía según la fuerza que se le aplique a la masa, pero tiene un límite superior igual a μN, con N la fuerza normal aplicada sobre la masa. Como no hay movimiento en el eje y, sabemos que la normal es igual a la componente del peso en este eje $N = mg\cos\alpha = \sqrt{3}mg/2$. Así que ahora tenemos 3 fuerzas en el eje x, entonces la suma (en valor absoluto, ya que nos interesa la magnitud) de la fuerza del resorte y de la componente del peso debe ser menor a μN para encontrar el rango de la coordenada x,

$$\begin{aligned}
|F_r - mg\sin\alpha| &\leq \mu N \\
\Leftrightarrow |-k(x-l_0) - mg\sin\alpha| &\leq \mu mg\cos\alpha \\
\Leftrightarrow \left|-\frac{mg}{l_0}(x-l_0) - \frac{mg}{2}\right| &\leq \frac{mg}{4} \\
\Leftrightarrow \frac{mg}{l_0}\left|x - \frac{l_0}{2}\right| &\leq \frac{mg}{4} \\
\Leftrightarrow \left|x - \frac{l_0}{2}\right| &\leq \frac{l_0}{4} \\
\Rightarrow \frac{l_0}{4} \leq x &\leq \frac{3l_0}{4}
\end{aligned}$$

Para el último ítem escribimos la ecuación de movimiento en el eje x:

$$m\ddot{x} = -k(x-l_0) - \frac{mg}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\mu_c,$$

que es una EDO de la forma $m\ddot{x} = -Ax + B$, con A y B constantes, por lo que la *frecuencia angular* es la misma que si no tuviese la constante B, o sea, como el problema $m\ddot{x} = -k(x-l_0)$, donde la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{k/m}$. La masa intenta seguir un movimiento armónico simple, por lo que la primera vez que para es a la mitad del periodo P,

$$T = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{k/m}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{l_0}{g}},$$

por lo tanto, este tiempo no depende de la constante de fricción cinemático, en lo que si influye es en la posición a la que llega, que es menor mientrar mayor sea μ_c.

P2.-

Considere un tubo de radio interno R y largo L colocado en posición vertical, con su extremo inferior cerrado. En un cierto instante se suelta el extremo superior del tubo (y desde el reposo) un émbolo de masa m, que se mueve hacia abajo por efecto de la gravedad, sin roce con las paredes del tubo, comprimiendo el aire encerrado por debajo de él. A medida que el aire de la cámara inferior se comprime, su presión P aumenta de modo tal que el producto entre la presión P y el volumen V de la cámara se mantiene constante ($PV = C_0$, con C_0 conocido). La presión atmosférica fuera del tubo es igual a P_0.

1. Escriba la ecuación de movimiento para el émbolo.

2. Determine a que altura el émbolo alcanza su máxima velocidad.

3. Determine una ecuación para encontrar la altura mínima que alcanza el émbolo sobre la base del tubo.

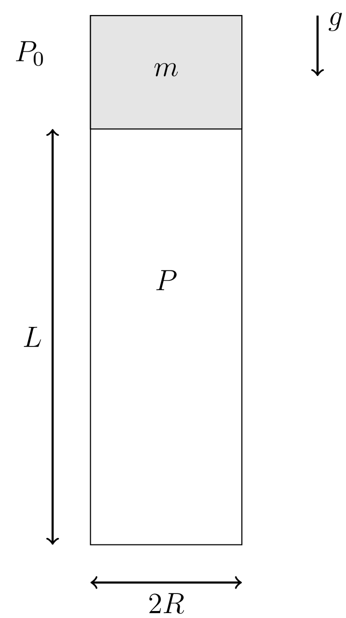


Figura 1

Sabemos que la presión atmosférica genera una fuerza hacia abajo a los objetos en la Tierra. La presión dentro del tubo va aumentando cuando disminuye el volumen, y esta genera una fuerza sobre el émbolo que apunta hacia arriba, o sea, se resiste a que el émbolo baje.

La fuerza ejercida por una presión se calcula como:

$$F_p = A \cdot P,$$

donde P es la presión y A es el área sobre la cual actúa, en este caso el área de las caras del émbolo $A = \pi R^2$. También se tiene la fuerza ejercida por la gravedad, así que en total tenemos 3 fuerzas aplicadas sobre el émbolo:

$$\vec{F}_P = \pi R^2 P \hat{k}$$
$$\vec{F}_{P_0} = -\pi R^2 P_0 \hat{k}$$
$$\vec{F}_g = -gm\hat{k}$$

donde los signos están dados por hacia dónde apunta la fuerza y se elige un sistema de coordenadas cartesiano con origen en la base del tubo. Para encontrar la expresión de la presión producida en la parte interior del tubo, bajo el émbolo, usamos la relación dada en el enunciado para la presión y el volumen, sabiendo que el volumen se calcula como $V = \pi R^2 z$, donde z es la altura a la que se encuentra la parte de abajo del émbolo, medido desde la base del tubo. Así que la presión quedaría como $P = C_0/V = C_0/\pi R^2 z$, por ende, la fuerza producida por esta presión es:

$$\vec{F}_P = \frac{C_0}{z}\hat{k}$$

Como se ve, las fuerzas son ejercidas únicamente en el eje vertical, así que la sumatoria de fuerzas en este eje sería:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_i &= \vec{F}_P + \vec{F}_{P_0} + \vec{F}_g \\ &= \frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm.\end{aligned}$$

Utilizando la segunda ley de Newton, $F = ma$, obtenemos nuestra ecuación de movimiento para el émbolo!!!:

$$m\ddot{z} = \frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm, \tag{1}$$

ocupamos *el trucazo de mecánica* para la segunda derivada de la altura/posición,

$$m\dot{z}\frac{d\dot{z}}{dz} = \frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm,$$

e integramos utilizando como posición inicial $z_0 = L$ que es desde donde se suelta el émbolo con velocidad inicial $\dot{z}_0 = 0$, ya que se suelta desde el reposo,

$$\begin{aligned} m\int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}} \dot{z}\frac{d\dot{z}}{dz}dz &= \int_{z_0}^{z} \left(\frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm\right) dz \\ m\int_0^{\dot{z}} \dot{z}d\dot{z} &= \int_L^z \frac{C_0}{z}dz - (\pi R^2 P_0 + gm)\int_L^z dz \end{aligned}$$

$$m\frac{\dot{z}^2}{2} = C_0 \ln\frac{z}{L} - (\pi R^2 P_0 + gm)(z - L) \tag{2}$$

Ahora, para encontrar los máximos y mínimos que nos piden, igualamos a 0 las derivadas de estas cantidades. Si una curva tiene una forma cóncava (carita triste :C) el punto en el que la derivada es 0 corresponde al máximo, mientras que si una curva es convexa (carita feliz C:[1]), la derivada es 0 en el mínimo.

Entonces, para encontrar la altura donde la velocidad es máxima ocupamos la derivada de esta con respecto al tiempo, o sea, la aceleración con la expresión de (1):

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{z}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \ddot{z} = 0 \Rightarrow \frac{C_0}{z_{v_{\text{máx}}}} - \pi R^2 P_0 - gm = 0 \\ \Rightarrow z_{v_{\text{máx}}} = \frac{C_0}{\pi R^2 P_0 + mg}.\end{aligned}$$

Y por último, para calcular la altura mínima, ocupamos dónde la velocidad se hace 0 (deja de bajar) utilizando la expresión de (2):

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Leftrightarrow \dot{z} = 0 \Rightarrow C_0 \ln\frac{z_{\text{mín}}}{L} - (\pi R^2 P_0 + gm)(z_{\text{mín}} - L) = 0,$$

que se puede calcular numéricamente para constantes dadas.

[1] Como diría alguna vez mi auxiliar: *convexo con sex0, carita feliz*

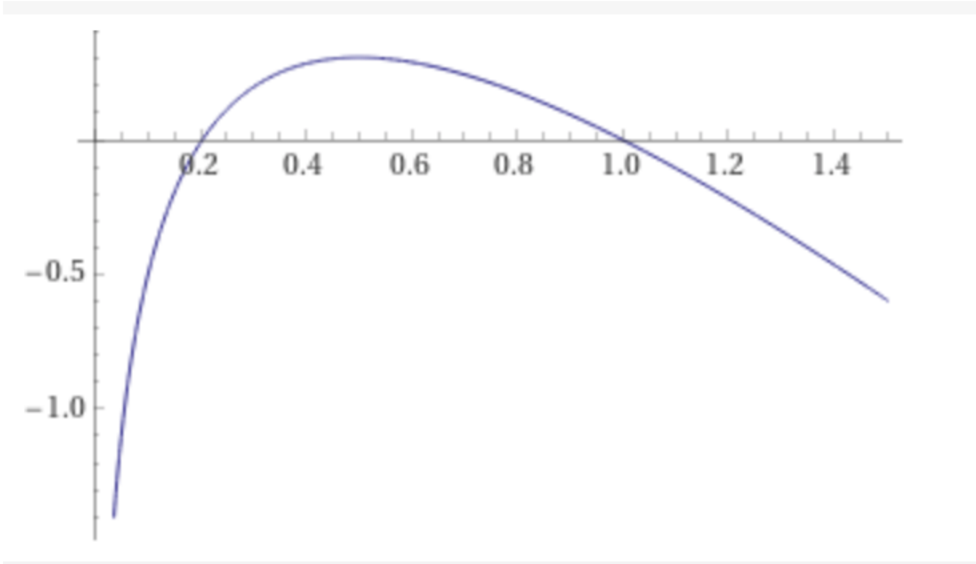


Figura 2: Forma de la expresión para encontrar la altura mínima. Donde debemos tomar la primera intersección con el eje x, ya que el otro punto corresponde al punto más alto (donde la derivada también es 0).