

Auxiliar 7

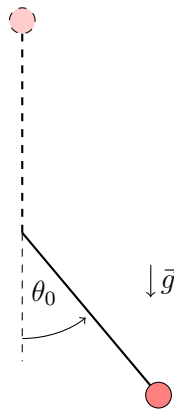
Fuerzas restitutivas

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas

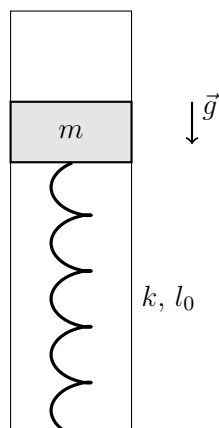
Ayudantes: Felipe Cubillos, Alvaro Flores

P1.- Calcule la velocidad inicial v_0 necesaria para que la masa en el péndulo alcance el punto máximo ($\theta = \pi$) cuando parte desde un ángulo θ_0 con respecto a la horizontal.



P2.- La masa m se libera, dentro de un tubo sin roce, desde el reposo cuando el resorte está en su largo natural l_0 , responder:

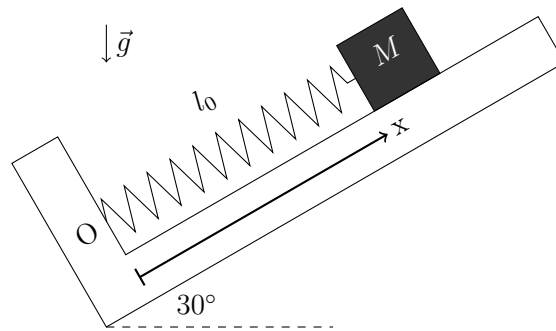
1. ¿Cuál es la compresión máxima que alcanza el resorte?
2. ¿Cuál es la máxima velocidad de m ?



P3.-

Un bloque puntual de masa M se encuentra sobre una superficie inclinada con un ángulo $\alpha = 30^\circ$ respecto de la horizontal y ligado mediante un resorte ideal de largo natural l_0 a un punto fijo O.

1. Sin considerar roce, se observa que el bloque se mantiene en reposo en $x = l_0/2$. Determine el valor de la constante elástica del resorte en función de los datos del problema.
2. Ahora, considerando un roce estático entre el bloque y la superficie con coeficiente $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, determine el rango de la coordenada x en el que el bloque se mantiene quieto.
3. Si en $t = 0$ el bloque se libera desde $x = 0$, determine el tiempo T en el que el bloque se detiene por primera vez, ¿este tiempo depende del roce con la superficie?



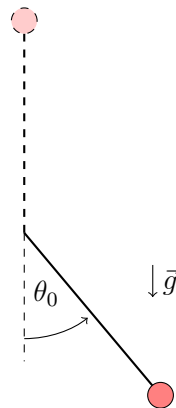
Auxiliar 7

Fuerzas restitutivas

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.- Calcule la velocidad inicial v_0 necesaria para que la masa en el péndulo alcance el punto máximo ($\theta = \pi$) cuando parte desde un ángulo θ_0 con respecto a la horizontal.



Respuesta

Este es un ejercicio introductorio de péndulos. Usamos coordenadas cilíndricas donde las fuerzas implicadas son: la tensión en $-\hat{\rho}$ y el peso que se descompone como $-mg\hat{k} = mg \cos \theta \hat{\rho} - mg \sin \theta \hat{\phi}$, por lo que haciendo segunda ley de Newton tenemos:

$$m((\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}) = -T\hat{\rho} + mg \cos \theta \hat{\rho} - mg \sin \theta \hat{\theta},$$

donde de la ecuación escalar de $\hat{\theta}$ podemos hacer trucazo de mecánica y usar integrales definidas,

$$\begin{aligned} R\dot{\theta}d\dot{\theta} &= -g \sin \theta d\theta \\ \Rightarrow R \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} &= -g \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} \Big|_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} &= \frac{g}{R} \cos \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta}, \end{aligned}$$

ahora imponemos que llegue justo ($\dot{\theta}_f = 0$) hasta arriba, $\theta_f = \pi$,

$$-\frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = -\frac{g}{R} \cos \theta_0$$

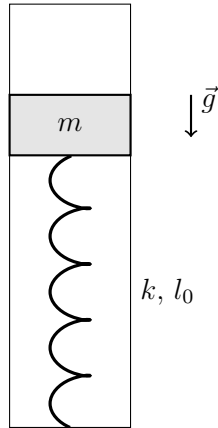
$$\Rightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2g}{R} \cos \theta_0},$$

y la velocidad tangencial se calcula como $v = R\dot{\theta}$,

$$v_0 = R\dot{\theta}_0 = \sqrt{2gR \cos \theta_0}$$

P2.- La masa m se libera, dentro de un tubo sin roce, desde el reposo cuando el resorte está en su largo natural l_0 , responder:

1. ¿Cuál es la compresión máxima que alcanza el resorte?
2. ¿Cuál es la máxima velocidad de m ?



Respuesta

Solo tenemos movimiento en un eje, que lo definimos como \hat{k} . Tenemos la fuerza del resorte $F = -k\Delta x$ y la fuerza peso, por lo que nuestra ecuación de movimiento sería:

$$m\ddot{z} = -k(z - l_0) - mg,$$

donde podemos integrar ocupando trucazo de mecánica y utilizando que el movimiento comienza desde el reposo, $\dot{z}_0 = 0$, en la altura $z_0 = l_0$,

$$m \int_0^{\dot{z}} \dot{z} d\dot{z} = (kl_0 - mg) \int_{l_0}^z dz - k \int_{l_0}^z z dz$$

$$\Leftrightarrow m \frac{\dot{z}^2}{2} = (kl_0 - mg)(z - l_0) - \frac{k}{2}(z^2 - l_0^2).$$

El resorte alcanza su máxima compresión cuando la masa deja de bajar, o sea, $\dot{z}_f = 0$, imponemos

esto en la expresión encontrada para \dot{z} ,

$$\begin{aligned} (kl_0 - mg)(z_f - l_0) - \frac{k}{2}(z_f^2 - l_0^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{k}{2}z_f^2 + (kl_0 - mg)z_f - l_0(kl_0 - mg) + \frac{kl_0^2}{2} &= 0 \\ \Rightarrow az_f^2 + bz_f + c &= 0, \end{aligned}$$

que es una ecuación cuadrática con solución de la forma:

$$z_{f1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

donde tenemos dos soluciones: una será la altura inicial y la otra el punto más bajo que alcanza la masa, que es lo que buscamos.

Para saber la velocidad máxima imponemos que la aceleración sea 0, $\ddot{z} = 0$, por lo que ocupamos la primera ecuación para encontrar la altura donde pasa esto,

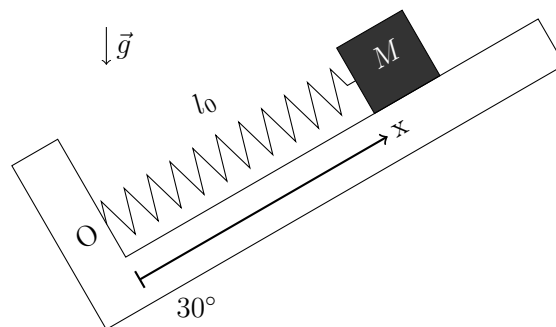
$$\begin{aligned} -k(z_{vm\acute{a}x} - l_0) - mg &= 0 \\ \Leftrightarrow z_{vm\acute{a}x} &= l_0 - \frac{mg}{k}, \end{aligned}$$

luego esta expresión la reemplazamos en la expresión que encontramos de la velocidad en función de la altura, $\dot{z}(z)$.

P3.-

Un bloque puntual de masa M se encuentra sobre una superficie inclinada con un ángulo $\alpha = 30^\circ$ respecto de la horizontal y ligado mediante un resorte ideal de largo natural l_0 a un punto fijo O.

1. Sin considerar roce, se observa que el bloque se mantiene en reposo en $x = l_0/2$. Determine el valor de la constante elástica del resorte en función de los datos del problema.
2. Ahora, considerando un roce estático entre el bloque y la superficie con coeficiente $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, determine el rango de la coordenada x en el que el bloque se mantiene quieto.
3. Considerando roce cinético μ_c , si en $t = 0$ el bloque se libera desde $x = 0$, determine el tiempo T en el que el bloque se detiene por primera vez, ¿este tiempo depende del roce con la superficie?



Respuesta

Utilizando un sistema de coordenadas cartesiano inclinado y con origen en el punto O, obtenemos que para que el bloque esté en reposo se debe igualar la fuerza del resorte con la de la gravedad en el eje x ,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\Big|_{x=l_0/2} &= F_r - mg \sin \alpha = 0 \\ \Leftrightarrow -k\left(\frac{l_0}{2} - l_0\right) &= mg \sin \alpha \\ \Leftrightarrow k &= \frac{2mg \sin \alpha}{l_0} = \frac{mg}{l_0}, \end{aligned}$$

donde $\sin 30^\circ = 1/2$ y $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, con lo que conseguimos la constante elástica de nuestro resorte.

Ahora, sabemos que la fuerza del roce estático varía según la fuerza que se le aplique a la masa, pero tiene un límite superior igual a μN , con N la fuerza normal aplicada sobre la masa. Como no hay movimiento en el eje y , sabemos que la normal es igual a la componente del peso en este eje $N = mg \cos \alpha = \sqrt{3}mg/2$. Así que ahora tenemos 3 fuerzas en el eje x , entonces la suma (en valor absoluto, ya que nos interesa la magnitud) de la fuerza del resorte y de la componente del peso debe ser menor a μN para encontrar el rango de la coordenada x ,

$$\begin{aligned} |F_r - mg \sin \alpha| &\leq \mu N \\ \Leftrightarrow |-k(x - l_0) - mg \sin \alpha| &\leq \mu mg \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \left| -\frac{mg}{l_0}(x - l_0) - \frac{mg}{2} \right| &\leq \frac{mg}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{mg}{l_0} \left| x - \frac{l_0}{2} \right| &\leq \frac{mg}{4} \\ \Leftrightarrow \left| x - \frac{l_0}{2} \right| &\leq \frac{l_0}{4} \\ \Rightarrow \frac{l_0}{4} &\leq x \leq \frac{3l_0}{4} \end{aligned}$$

Para el último ítem escribimos la ecuación de movimiento en el eje x :

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) - \frac{mg}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\mu_c,$$

que es una EDO de la forma $m\ddot{x} = -Ax + B$, con A y B constantes, por lo que la *frecuencia angular* es la misma que si no tuviese la constante B , o sea, como el problema $m\ddot{x} = -k(x - l_0)$, donde la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{k/m}$. La masa intenta seguir un movimiento armónico simple, por lo que la primera vez que para es a la mitad del periodo P ,

$$T = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{k/m}} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \pi \sqrt{\frac{l_0}{g}},$$

por lo tanto, este tiempo no depende de la constante de fricción cinemático, en lo que si influye es en la posición a la que llega, que es menor mientras mayor sea μ_c .