FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 6

Oscilaciones no lineales

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- Péndulo anarmónico

Considere un péndulo con una masa m suspendida en un resorte ideal con constante elástica k y largo natural l_0 y en presencia de un campo gravitatorio g, ver Figura 1.

a) Calcule el Lagrangiano y expanda en Taylor hasta tercer orden el término asociado a la energía potencial elástica

b) Encuentre las ecuaciones de movimiento

c) Para resolver la ecuación de movimiento orden por orden, expanda las coordenadas cartesianas como $x = x^{(0)} + \lambda x^{(1)}$ y $y = y^{(0)} + \lambda y^{(1)}$, al igual que las frecuencias del sistema $\nu_i = \omega_i + \lambda\omega_i^{(1)}$, donde $\lambda \ll 1$ es un parámetro perturbativo del problema

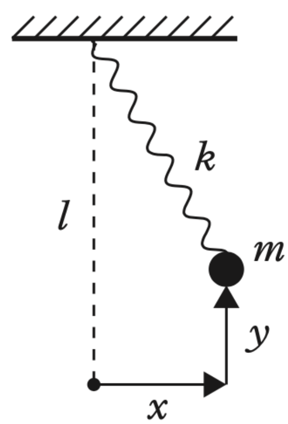


Figura 1: Péndulo-resorte

Expansión en Taylor

Sabemos que una función $f(x)$ de una sola variable puede ser expandida en torno a un punto x_0 en serie de Taylor como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n} (x - x_0)^n \,,$$

mientras que para una función de dos variables, $f(x, y)$, en torno a un punto (x_0, y_0), sería

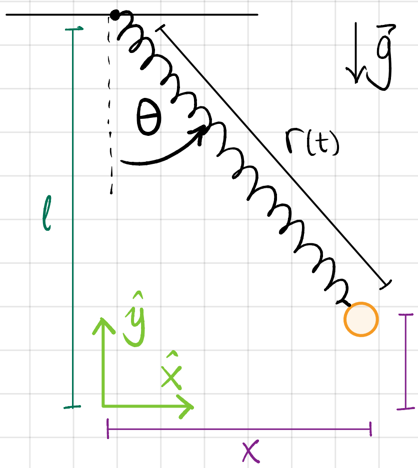
$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^j} (x - x_0)^i (y - y_0)^j \,.$$

Auxiliar 6

P1

a) Este problema tiene dos grados de libertad: (r,θ) ó (x,y), escogeremos las coord. cartesianas.

La energía cinética es simplemente



$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

y las energías potenciales

- $U_g = -m\vec{g}\cdot\vec{r} = mg\hat{y}\cdot(x\hat{x} + y\hat{y}) = mgy$
- $U_k = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + (l-y)^2} - l_0\right)^2$

entonces el Lagrangiano es

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+(l-y)^2} - l_0\right)^2$$

Normalmente aproximaríamos este Lagrangiano hasta segundo orden en Taylor para así obtener EoMs lineales. Sin embargo, si la perturbación de las coord., $q_i = q_{i0} + \delta q_i$, no es tan pequeña, hay que considerar más órdenes en la expansión.

Expandamos la energía potencial elástica al ser el único término no polinomial, donde el Taylor de dos variables es

$$P_n(x,y) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2-i} \frac{1}{i!\,j!} \frac{\partial^{(i+j)}}{\partial x^i \partial y^j} f(x,y)\Big|_{x=x_0,\,y=y_0} (x-x_0)^i (y-y_0)^j$$

$$= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$+ \frac{1}{2!} f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2!} f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + 2\cdot\frac{1}{2!} f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)$$

$$+ \frac{3!}{2!}\frac{1}{3!} f_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) + \frac{3!}{2!}\frac{1}{3!} f_{yyx}(x-x_0)(y-y_0)^2 + \frac{1}{3!} f_{xxx}(x-x_0)^3 + \frac{1}{3!} f_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3$$

$$+ \dots$$

El punto (x_0, y_0) es la posición de equilibrio (estable si dios quiere), donde es directo que $x_0 = 0$ y l es escogido t.q. el origen de nuestro sist. se encuentre a la altura específica del equilibrio en la coord. y.

Ocupando Mathematica jejeje, obtenemos

$$-\frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+(l-y)^2} - l_0\right)^2 = -\frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + k(l-l_0)\delta y - \frac{k}{2}\delta y^2 - \frac{k(l-l_0)}{2l}\delta x^2 + \underbrace{\frac{k l_0}{2l^2}\delta x^2 \delta y}_{\text{término de orden 3}} + \dots$$

y podemos calcular l considerando el caso 1D con $x \overset{!}{=} 0$

$$m\ddot{y} = -mg + k((l-y)-l_0)$$

donde $\ddot{y} \overset{!}{=} 0$ en $y=0 \Rightarrow mg = +k(l-l_0) \Rightarrow \boxed{l = l_0 + mg/k}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+(l-y)^2} - l_0\right)^2 \approx -\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k} + mg\,\delta y - \frac{k}{2}\delta y^2 - \frac{mg}{2l}\delta x^2 + \frac{k l_0}{2l^2}\delta x^2 \delta y$$

reemplazando en el Lagrangiano, renombrando las ctes. y notando que se cancelan los $mg\,\delta y$ de U_g y U_k

$$L = \frac{1}{2}m\left(\delta\dot{x}^2 + \delta\dot{y}^2 - \frac{k}{m}\delta y^2 - \frac{g}{l}\delta x^2 + \frac{k l_0}{m l^2}\delta x^2 \delta y\right) \cancel{-\frac{1}{2}\frac{m^2 g^2}{k}}\ \text{cte.}$$

$$\equiv \frac{1}{2}m\left(\delta\dot{x}^2 + \delta\dot{y}^2 - \omega_1^2 \delta x^2 - \omega_2^2 \delta y^2 + 2\alpha\,\delta x^2 \delta y\right)$$

donde definimos $\quad \omega_1^2 \equiv \dfrac{k}{m}, \quad \omega_2^2 \equiv \dfrac{g}{l}, \quad \alpha \equiv \dfrac{k l_0}{2ml^2}$

Desde ahora cambiemos la notación de δq_i a simplemente q_i (para no escribir tantos δ's)

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega_1^2 x^2 - \omega_2^2 y^2 + 2\alpha x^2 y\right)$$

entonces las ecs. de E-L serían

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = -\omega_1^2 x + 2\alpha x y$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = -\omega_2^2 y + \alpha x^2$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(\dots) = \ddot{x}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(\dots) = \ddot{y}$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_1^2 x - 2\alpha x y = 0} \ (1) \quad \wedge \quad \boxed{\ddot{y} + \omega_2^2 y - \alpha x^2 = 0} \ (2)$$

A continuación haremos el procedimiento habitual de oscilaciones anarmónicas (revisar Landau o Saletan), separamos los distintos órdenes que constituyen x e y como

$$x(t) = x^{(0)} + \alpha x^{(1)} + \alpha^2 x^{(2)} + \dots \quad \wedge \quad y(t) = y^{(0)} + \alpha y^{(1)} + \alpha^2 y^{(2)} + \dots$$

También perturbaremos las frecuencias como

$$\nu_1 \equiv \omega_1 + \alpha\omega_1^{(1)} + \alpha^2 \omega_1^{(2)} + \dots \quad \wedge \quad \nu_2 \equiv \omega_2 + \alpha\omega_2^{(1)} + \alpha^2\omega_2^{(2)} + \dots$$

entonces si definimos $\tau_1 \equiv \nu_1 t \ \wedge \ \tau_2 = \nu_2 t$ para x e y respectivamente

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \nu_1^2 \frac{d^2x}{d\tau_1^2} \equiv \nu_1^2 x'' = (\omega_1 + \alpha\omega_1^{(1)} + \alpha^2\omega_1^{(2)} + \dots)^2 (x^{(0)''} + \alpha x^{(1)''} + \alpha^2 x^{(2)''} + \dots)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = (\omega_2 + \alpha\omega_2^{(1)} + \alpha^2\omega_2^{(2)} + \dots)(\underbrace{y^{(0)''}}_{\text{derivadas c/r a } \tau_2} + \alpha y^{(1)''} + \alpha^2 y^{(2)''} + \dots)$$

Reemplazando en (1)

$$\Rightarrow (\omega_1 + \alpha\omega_1^{(1)} + \alpha^2\omega_1^{(2)} + \dots)^2 (x^{(0)''} + \alpha x^{(1)''} + \alpha^2 x^{(2)''} + \dots) + \omega_1^2 (x^{(0)} + \alpha x^{(1)} + \alpha^2 x^{(2)} + \dots)$$

$$- 2\alpha (x^{(0)} + \alpha x^{(1)} + \alpha^2 x^{(2)} + \dots)(y^{(0)} + \alpha y^{(1)} + \alpha^2 y^{(2)} + \dots) = 0$$

calcularemos la corrección solo hasta primer orden, $x^{(1)}$ y $y^{(1)}$, por lo que solo nos quedaremos con los términos de orden $O(\alpha^0)$ y $O(\alpha^1)$, el resto lo despreciamos

$$\Rightarrow (\omega_1 + \alpha\omega_1^{(1)})^2 (x^{(0)''} + \alpha x^{(1)''}) + \omega_1^2 (x^{(0)} + \alpha x^{(1)}) - 2\alpha (x^{(0)} y^{(0)} + \alpha x^{(0)} y^{(1)} + \alpha x^{(1)} y^{(0)}) = 0$$

$$\Rightarrow (\omega_1^2 + 2\alpha\omega_1\omega_1^{(1)})(x^{(0)''} + \alpha x^{(1)''}) + \omega_1^2 x^{(0)} + \alpha\omega_1^2 x^{(1)} - 2\alpha x^{(0)} y^{(0)} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 x^{(0)''} + \alpha\omega_1^2 x^{(1)''} + 2\alpha\omega_1\omega_1^{(1)} x^{(0)''} + \omega_1^2 x^{(0)} + \alpha\omega_1^2 x^{(1)} - 2\alpha x^{(0)} y^{(0)} = 0$$

Con esto armamos dos EDOs, una de orden $O(\alpha^0)$ y otra de orden $O(\alpha^1)$

$$\omega_1^2 (x^{(0)''} + x^{(0)}) \overset{!}{=} 0 \qquad (1.1)$$

$$\omega_1^2 (x^{(1)''} + x^{(1)}) + 2\omega_1\omega_1^{(1)} x^{(0)''} - 2x^{(0)} y^{(0)} \overset{!}{=} 0 \qquad (1.2)$$

Repetimos el procedimiento, ahora para (2)

$$\Rightarrow (\omega_2^2 + 2\alpha\omega_2\omega_2^{(1)})(y^{(0)''} + \alpha y^{(1)''}) + \omega_2^2 y^{(0)} + \alpha\omega_2^2 y^{(1)} - \alpha x^{(0)2} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_2^2 (y^{(0)''} + y^{(0)}) + \alpha [\omega_2^2 (y^{(1)''} + y^{(1)}) + 2\omega_2\omega_2^{(1)} y^{(0)''} - x^{(0)2}] = 0$$

y sacamos las dos EDOs

$$\omega_2^2 (y^{(0)''} + y^{(0)}) \overset{!}{=} 0 \qquad (2.1)$$

$$\omega_2^2 (y^{(1)''} + y^{(1)}) + 2\omega_2\omega_2^{(1)} y^{(0)''} - x^{(0)2} \overset{!}{=} 0 \qquad (2.2)$$

Notamos que (1.1) y (2.1) son M.A.S. con soluciones de la forma

$$x^{(0)}(\tau_1) = a\cos(\tau_1) = a\cos(\nu_1 t) \qquad \wedge \qquad y^{(0)}(\tau_2) = b\cos(\tau_2) = b\cos(\nu_2 t)$$

reemplacemos en (1.2)

$$\Rightarrow \omega_1^2 (x^{(1)''} + x^{(1)}) - 2\omega_1\omega_1^{(1)} a\cos(\tau_1) - 2ab\cos(\tau_1)\cos(\tau_2) = 0$$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$$\Rightarrow \omega_1^2 (x^{(1)''} + x^{(1)}) = \underbrace{2\omega_1\omega_1^{(1)} a\cos(\tau_1)}_{\text{forzamiento indeseado}} + ab[\cos(\tau_1+\tau_2) + \cos(\tau_1-\tau_2)]$$

A diferencia del Auxiliar 5, ahora debemos eliminar los forzamientos con frecuencia igual a la frecuencia natural de la EoM, de otra forma nuestro método de aproximación dejaría de ser válido ya que $q^{(1)}$ tenderían a infinito

Es por esto que debemos exigir $w_1^{(1)} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \nu_1 = \omega_1 \Rightarrow \tau_1 = \omega_1 t$ y obtendríamos

$$\Rightarrow \ddot{x}^{(1)} + \omega_1^2 x^{(1)} = ab\left[\cos(\omega_1 t + \nu_2 t) + \cos(\omega_1 t - \nu_2 t)\right] \quad (3)$$

antes de resolver esta EDO, desarrollemos (2.2)

$$\Rightarrow \omega_2^2\left(y^{(1)''} + y^{(1)}\right) = 2\omega_2 w_2^{(1)} b\cos(\tau_2) + a^2\cos(\tau_1)\cos(\tau_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_2^2\left(y^{(1)''} + y^{(1)}\right) = \underline{2\omega_2 w_2^{(2)} b\cos(\tau_2)} + \frac{a^2}{2}\left[\cos(2\tau_1) + 1\right]$$

aquí también tenemos que tomar $w_2^{(1)} \stackrel{!}{=} 0$ para que no tengamos una sol. divergente (por resonancia)

$$\Rightarrow \omega_2^2\left(y^{(1)''} + y^{(1)}\right) = \frac{a^2}{2}\left[\cos(2\omega_1 t) + 1\right]$$

y como ahora $\nu_2 = \omega_2 \Rightarrow \tau_2 = \omega_2 t$

$$\Rightarrow \ddot{y}^{(1)} + \omega_2^2 y^{(1)} = \frac{a^2}{2}\left[\cos(2\omega_1 t) + 1\right]$$

que tiene sol. homogénea

$$y_h^{(1)}(t) = A\cos(\omega_2 t) + B\sin(\omega_2 t)$$

y sol. particular $y_p^{(1)}(t) = \dfrac{a^2}{2\omega_2^2} + \dfrac{a^2}{2(\omega_2^2 - 4\omega_1)^2}\cos(2\omega_1 t)$

$$\Rightarrow y^{(1)}(t) = y_h^{(1)} + y_p^{(1)} = A\cos(\omega_2 t) + B\sin(\omega_2 t) + \frac{a^2}{2\omega_2^2} + \frac{a^2}{2(\omega_2^2 - 4\omega_1^2)}\cos(2\omega_1 t)$$

Recordando que $\nu_2 = \omega_2$

$$(3) \Rightarrow \ddot{x}^{(1)} + \omega_1^2 x_1 = ab\left[\cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)\right]$$

que tiene sol. homogénea

$$x_h^{(1)}(t) = C\cos(\omega_1 t) + D\sin(\omega_2 t)$$

y sol. particular

$$x_p^{(1)}(t) = -\frac{ab}{\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)}\cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \frac{ab}{\omega_2(2\omega_1 - \omega_2)}\cos((\omega_1 - \omega_2)t)$$

$$\Rightarrow x^{(1)}(t) = C\cos(\omega_1 t) + D\sin(\omega_2 t) - \frac{ab}{\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)}\cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \frac{ab}{\omega_2(2\omega_1 - \omega_2)}\cos((\omega_1 - \omega_2)t)$$

donde para encontrar las ctes. de integración A, B, C y D debemos usar las C.I. de este método

$$q^{(i)}(t=0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \wedge \quad \dot{q}^{(i)}(t=0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall t \geq 1$$

de todas formas, pasado el suficiente tiempo la sol. que domina es la sol. particular, entonces solo tomemos $x_p^{(1)}$ y $y_p^{(1)}$ (si quieren, calculen estas ctes., a mi me da pereza)

Finalmente, nuestra sol. completa (hasta orden $q^{(1)}, \alpha^{1}$) sería

- $x(t) = x^{(0)} + \alpha x^{(1)} = a\cos(\omega_1 t) - \dfrac{\alpha \cdot ab}{\omega_2(2\omega_1+\omega_2)}\cos((\omega_1+\omega_2)t) + \dfrac{\alpha \cdot ab}{\omega_2(2\omega_1-\omega_2)}\cos((\omega_1-\omega_2)t)$

- $y(t) = y^{(0)} + \alpha y^{(1)} = b\cos(\omega_2 t) + \dfrac{\alpha a^2}{2\omega_2^2} + \dfrac{\alpha \cdot a^2}{2(\omega_2^2-4\omega_1^2)}\cos(2\omega_1 t)$

En las siguientes Figuras se muestra una comparación entre la solución númerica del sist. de EDOs (1) y (2), y el resultado que obtuvimos

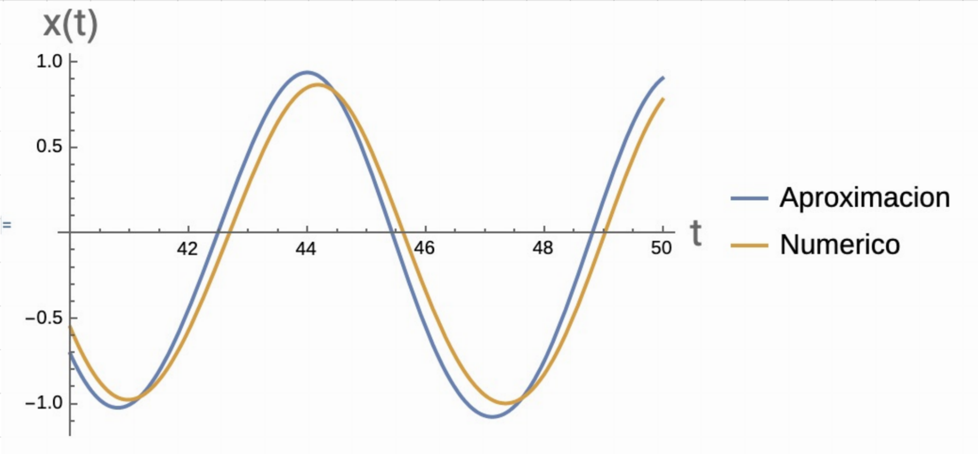


Fig 1: $x(t)$ para $\omega_1=1$, $\omega_2=1.2$, $a=1$, $b=2$ y $\alpha=0.05$

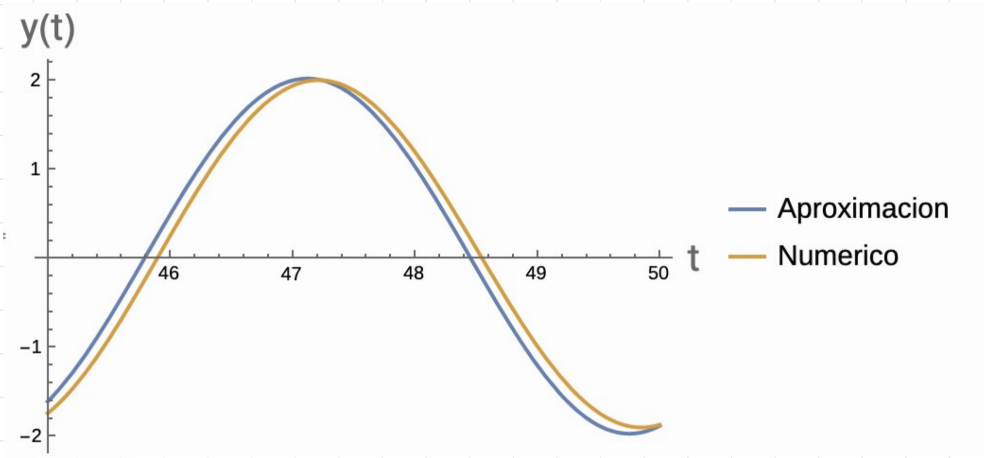


Fig 2: $y(t)$ para $\omega_1=1$, $\omega_2=1.2$, $a=1$, $b=2$ y $\alpha=0.05$