Auxiliar 5

Oscilaciones paramétricas I

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- Ecuación de Mathieu con roce

La ecuación de movimiento del péndulo de kapitza plano con roce viscoso está dada por la ecuación de Mathieu a la que se le agrega un término $\beta\dot{\eta}$

$$\ddot{\eta} + \beta\dot{\eta} + [\epsilon - 2h\cos(2t)]\,\eta = 0\,.$$

Las regiones de estabilidad e inestabilidad para el caso sin roce ($\beta = 0$) se visualizan en la Figura 1

a) Para $\beta = 0$ calcule las expresiones analíticas de los límites que definen las regiones de estabilidad para una región en torno a $(h, \epsilon) = (0, 1)$ (origen de la primera lengua de la Figura) considerando $h \ll 1$

b) Repita el cálculo anterior pero para $\beta \neq 0$

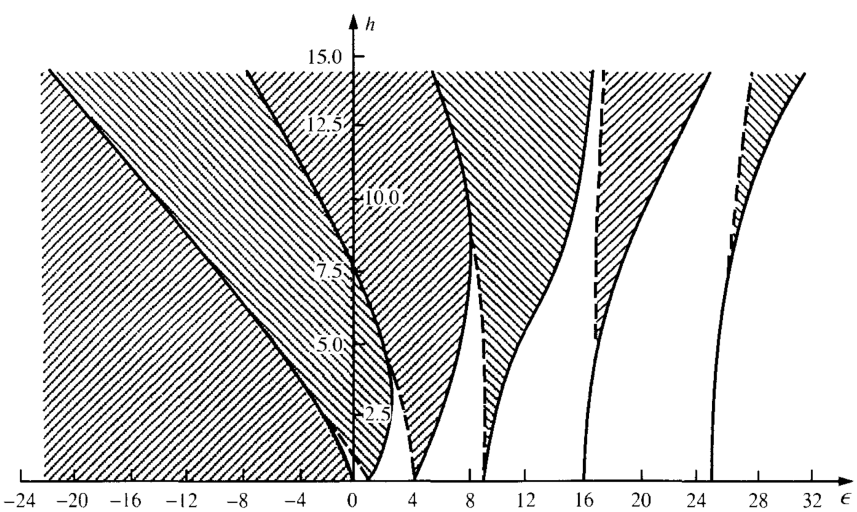


Figura 1: Regiones de estabilidad (zonas blancas) e inestabilidad (zonas achuradas) en función de los parámetros del problema

P2.- Péndulo Andronov-Kapitza

Considere un aro de diámetro R, el cual está lubricado. Un anillo de masa m puede deslizarse sobre el aro sintiendo el efecto de disipación de tipo húmeda caracterizada por el coeficiente de amortiguamiento λ.

Si el aro es sometido a girar con respecto a la vertical con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ (ver Figura 2)

a) Encuentre las ecuaciones de movimiento

b) Calcule los puntos de equilibrio y caracterícelos en función de los parámetros del problema

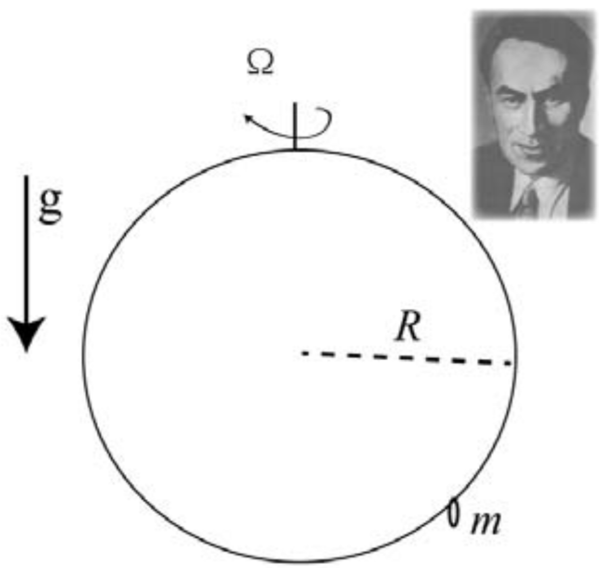


Figura 2: Péndulo de Andronov-Kapitza

Roce viscoso

Para considerar un problema con roce viscoso lineal con coeficiente λ, el Lagrangiano se modifica como

$$L' = e^{2\lambda t} L \,,$$

donde L es el Lagrangiano de toda la vida. Entonces las ecuaciones de movimiento se calculan utilizando las mismas ecs. de Euler-Lagrange, pero usando L'

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0$$

Auxiliar 5

P1

La ecuación de Mathieu sin roce está dada por

$$\ddot{\eta} + [\epsilon - 2h\cos(2t)]\eta = 0 \quad (*)$$

Para el punto $(h,\epsilon) = (0,1)$ esta se transforma a

$$\ddot{\eta} + \eta = 0 \Rightarrow \eta(t) = \eta_0 \cos(t+\delta) \quad (1)$$

con η_0 la amplitud de oscilación y δ un desfase. Debido a que consideraremos una región en torno a $(h,\epsilon) \approx (0,1) \Rightarrow h \ll 1$ y $\epsilon \sim 1$, tomaremos como ansatz (1) pero con un nuevo término $e^{i\mu t}$ que nos indicará si la sol. es estable o inestable, así que propongamos

$$\eta(t) = \eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta)$$

se puede tomar $\delta = 0$, pero así es más general

$$\Rightarrow \dot{\eta} = i\mu\,\eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta) - \eta_0 e^{i\mu t}\sin(t+\delta) \Rightarrow \ddot{\eta} = -\mu^2\eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta) - 2i\mu\,\eta_0 e^{i\mu t}\sin(t+\delta) - \eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta)$$

reemplazando en $(*)$

$$\Rightarrow -\mu^2\eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta) - 2i\mu\,\eta_0 e^{i\mu t}\sin(t+\delta) - \eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta) + [\epsilon - 2h\cos(2t)]\eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta) = 0$$

$$\Rightarrow [-\mu^2 - 1 + \epsilon]\cos(t+\delta) - 2i\mu\sin(t+\delta) - 2h\cos(2t)\cos(t+\delta) = 0 \quad (2)$$

reescribimos el último término

$$\begin{aligned}\cos(2t)\cos(t+\delta) &= \cos(2t-(t+\delta)) - \sin(2t)\sin(t+\delta) \\ &= \cos(t-\delta) - [\cos(2t)\cos(t+\delta) - \cos(2t+(t+\delta))] \\ &= \cos(t-\delta) - \cos(2t)\cos(t+\delta) + \cos(3t+\delta)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2t)\cos(t+\delta) = \frac{1}{2}[\cos(t-\delta) + \cos(3t+\delta)]$$

donde despreciamos el término $\cos(3t+\delta)$ ya que cumple el rol de un forzamiento con frecuencia distinta a la frecuencia natural del sist., $3 \neq 1$, y sería despreciable frente a otros "forzamientos" con frecuencia igual a la natural, como $\cos(t\pm\delta)$ y $\sin(t+\delta)$ (que tienen frecuencia 1 igual que el ansatz)

Reemplazamos en (2) y usamos

$$\cos(t\pm\delta) = \cos t\cos\delta \mp \sin t\sin\delta \quad \text{y} \quad \sin(t+\delta) = \sin t\cos\delta + \cos t\sin\delta$$

$$\Rightarrow [-\mu^2 - 1 + \epsilon](\cos t\cos\delta - \sin t\sin\delta) - 2i\mu(\sin t\cos\delta + \cos t\sin\delta) - h(\cos t\cos\delta + \sin t\sin\delta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos t[(-\mu^2 - 1 + \epsilon - h)\cos\delta - 2i\mu\sin\delta] + \sin t[(\mu^2 + 1 - \epsilon - h)\sin\delta - 2i\mu\cos\delta] = 0 \quad (3)$$

(3) tiene que resolverse $\forall t$ y como cos y sin son l.i. entonces los coeff. que los acompañan deben ser 0 c/u por si solo

$$(-\mu^2-1+\epsilon-h)\cos\delta - 2i\mu\sin\delta = 0$$

$$-2i\mu\cos\delta + (\mu^2+1-\epsilon-h)\sin\delta = 0$$

de forma matricial

$$\begin{pmatrix} (-\mu^2-1+\epsilon-h) & -2i\mu \\ -2i\mu & (\mu^2+1-\epsilon-h) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\delta \\ \sin\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\nexists\,\delta$ t.q. $\cos\delta=\sin\delta=0$, por lo que debemos imponer que la matriz de la izquierda no sea invertible

$$\Rightarrow \det\begin{vmatrix} (-\mu^2-1+\epsilon-h) & -2i\mu \\ -2i\mu & (\mu^2+1-\epsilon-h) \end{vmatrix} = h^2-(\mu^2+1-\epsilon)^2+4\mu^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (4)$$

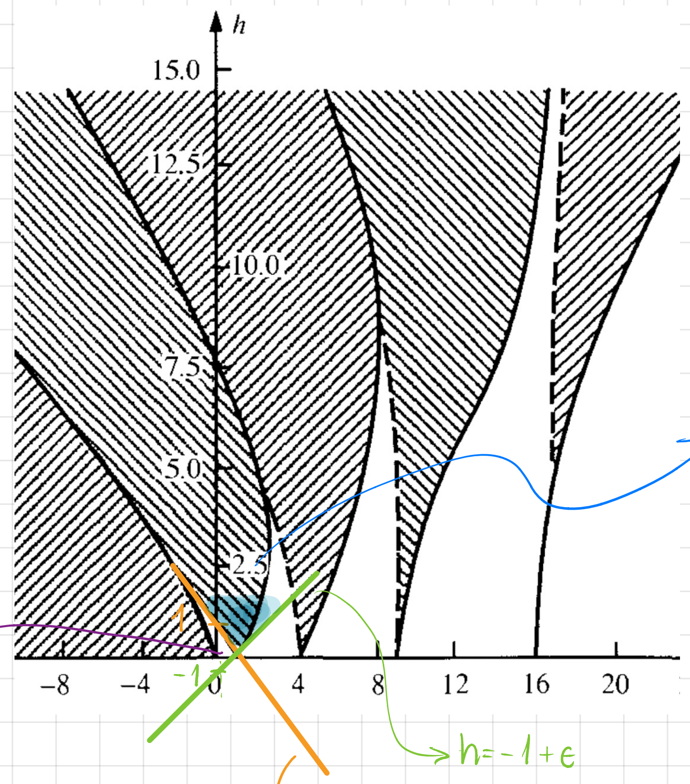
Ahora, recordamos que nuestro ansatz es $\eta(t)\propto e^{i\mu t}\cos(t+\delta)$, así que tenemos distintos casos

- $\mu^2>0$: entonces $\mu\in\mathbb{R}$ y $\eta(t)$ es oscilatorio estable
- $\mu^2<0$: entonces $\mu\in\mathbb{C}$ como $\mu=Re(\mu)+i\,Im(\mu) \Rightarrow i\mu t = -Im(\mu)t + iRe(\mu)t$, así que dependiendo si $Im(\mu)$ es positivo o negativo la solución será estable o inestable

entonces el límite de nuestras regiones están dados por $\mu^2=0$, reemplazando en (4)

$$\Rightarrow h^2-(1-\epsilon)^2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow h=\pm(1-\epsilon)$$

o sea que $h(\epsilon)$ es una función con pendiente ± 1 y que cruza el eje Y en ∓ 1



nuestra región de inestabilidad

Para $\epsilon=1$ y $h\neq 0$ de inmediato la solución es inestable

$h=-1+\epsilon$

$h=1-\epsilon$

Ahora, si tomamos $\beta \neq 0$

$$\ddot{\eta} + \beta\dot{\eta} + [\epsilon - 2h\cos(2t)]\eta = 0 \quad (5)$$

considerando el punto $(h, \epsilon, \beta) = (0, 1, 0)$ tenemos el mismo caso de antes

$$\ddot{\eta} + \eta = 0 \Rightarrow \eta(t) = \eta_0 \cos(t + \delta)$$

así que tomemos el mismo ansatz $\eta(t) = \eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta)$, reemplazando en (5)

$$-\mu^2 \eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta) - 2i\mu\,\eta_0 e^{i\mu t}\sin(t+\delta) - \eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta)$$
$$+ \beta\left(i\mu\,\eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta) - \eta_0 e^{i\mu t}\sin(t+\delta)\right)$$
$$+ [\epsilon - 2h\cos(2t)]\,\eta_0 e^{i\mu t}\cos(t+\delta) = 0$$

haciendo lo mismo de antes

$$\cos t\left[(-\mu^2 - 1 + \epsilon - h)\cos\delta - 2i\mu\sin\delta + \beta i\mu\cos\delta - \beta\sin\delta\right]$$
$$+ \sin t\left[(\mu^2 + 1 - \epsilon - h)\sin\delta - 2i\mu\cos\delta - \beta\cos\delta - \beta i\mu\sin\delta\right] = 0$$

los coeff. que acompañan el cos y sin deben ser 0 (jugamos un poco con los signos)

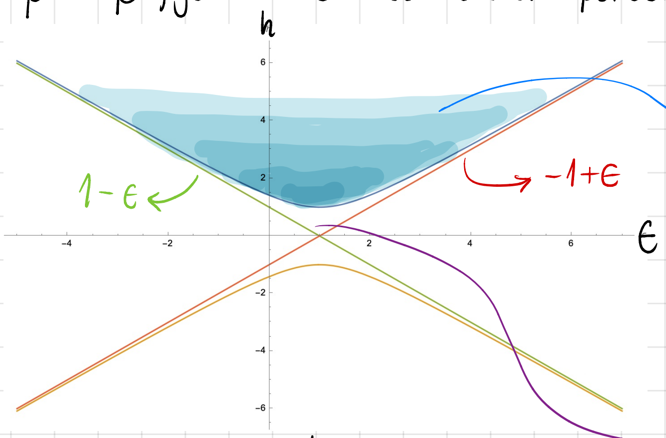
$$\left(h + (\mu^2 + 1 - \epsilon - \beta i\mu)\right)\cos\delta + (2i\mu + \beta)\sin\delta = 0$$
$$(2i\mu + \beta)\cos\delta + \left(h - (\mu^2 + 1 - \epsilon - \beta i\mu)\right)\sin\delta = 0$$
$$\Rightarrow \det(\cdots) = h^2 - (\mu^2 + 1 - \epsilon - \beta i\mu)^2 - (2i\mu + \beta)^2 = 0$$

siguiendo la misma lógica de antes, el límite de las regiones está dado por $\mu^2 = 0$ $(\Leftrightarrow \mu = 0)$

$$\Rightarrow h^2 - (1-\epsilon)^2 - \beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{h^2}{\beta^2} - \frac{(1-\epsilon)^2}{\beta^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{\beta^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ con } y = 1 - \epsilon$$

donde para β fijo tenemos la ec. de una hipérbola con asíntotata $1-\epsilon$ y $-1+\epsilon$



$\beta = 1$

zona inestabilidad

El aumento de β hace "subir" la curva de la hipérbola y tomando $\beta = 0$ recuperamos exactamente lo obtenido antes.
El roce estabiliza la solución

Tenemos que podemos tener $h \neq 0$ (pequeño si) y ahora la solución sí sería estable

P2

Un sistema con roce viscoso lineal con coeficiente λ (por ej. en un oscilador 1D amortiguado este coeff. aparece como $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2 x=0$) puede ser modelado con un Lagrangiano de la forma

$$L = e^{2\lambda t}(T-V)$$

de donde las ecs. de mov. se calculan con E-L usual

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Entonces encontremos el Lagrangiano del sistema.

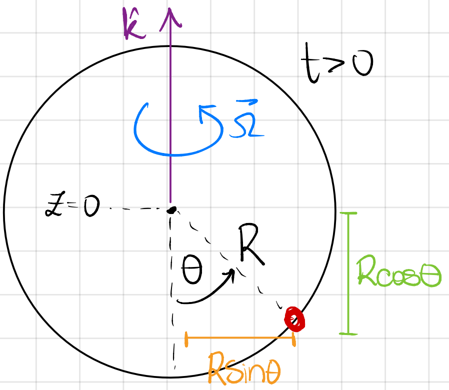


Fig 1: Vista $\perp$ al aro

En coord. cartesianas:

- $x = R\sin\theta\cos\Omega t$
- $y = R\sin\theta\sin\Omega t$
- $z = -R\cos\theta$

- $\dot{x} = R\cos\theta\cos\Omega t\,\dot{\theta} - R\Omega\sin\theta\sin\Omega t$
- $\dot{y} = R\cos\theta\sin\Omega t\,\dot{\theta} + R\Omega\sin\theta\cos\Omega t$
- $\dot{z} = R\sin\theta\,\dot{\theta}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$= \frac{1}{2}m\Big(R^2\cos^2\theta\cos^2\Omega t\,\dot{\theta}^2 + R^2\Omega^2\sin^2\theta\sin^2\Omega t \cancel{- 2R^2\Omega\cos\theta\sin\theta\sin\Omega t\cos\Omega t\,\dot{\theta}}$$
$$+ R^2\cos^2\theta\sin^2\Omega t\,\dot{\theta}^2 + R^2\Omega^2\sin^2\theta\cos^2\Omega t \cancel{+ 2R^2\Omega\cos\theta\sin\theta\cos\Omega t\sin\Omega t\,\dot{\theta}}$$
$$+ R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2\Big)$$

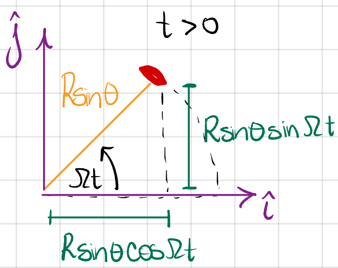


Fig 2: Vista desde arriba

$$= \frac{1}{2}m\left(R^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + R^2\Omega^2\sin^2\theta + R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\,\Omega^2\right) \longrightarrow \text{rapidez coord. esféricas con } \dot{\phi}=\Omega$$

y la energía potencial gravitatoria

$$U = -m\vec{g}\cdot\vec{r} = mg\hat{k}\cdot\left(R\sin\theta\cos\Omega t\,\hat{\imath} + R\sin\theta\sin\Omega t\,\hat{\jmath} - R\cos\theta\,\hat{k}\right)$$

$$= -mgR\cos\theta$$

$$\Rightarrow L = e^{2\lambda t}\left(\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\,\Omega^2\right) + mgR\cos\theta\right)$$

así que la ec. de mov. es

- $$\frac{\partial L}{\partial \theta} = e^{2\lambda t}\left(mR^2 \sin\theta\cos\theta\,\Omega^2 - mgR\sin\theta \right)$$

- $$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = e^{2\lambda t} mR^2\dot\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = e^{2\lambda t}\left(2\lambda mR^2\dot\theta + mR^2\ddot\theta\right)$$

$$\Rightarrow \ddot\theta + 2\lambda\dot\theta - \Omega^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta = 0 \quad (1)$$

Los equilibrios (relativos) se dan en $\ddot\theta = \dot\theta = 0$

$$\Rightarrow \frac{g}{R}\sin\theta = \Omega^2\sin\theta\cos\theta$$

que se cumple para $\sin\theta_0 \overset{!}{=} 0$ ó $\cos\theta_0 \overset{!}{=} \frac{g}{R\Omega^2}$.

Tomamos $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ y expandimos a primer orden la EoM (1)

- $\sin(\theta_0+\delta\theta)\cos(\theta_0+\delta\theta) = \sin\theta_0\cos\theta_0 + (\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)\,\delta\theta + \mathcal{O}(\delta\theta^2)$
- $\sin(\theta_0+\delta\theta) = \sin\theta_0 + \cos\theta_0\cdot\delta\theta + \mathcal{O}(\delta\theta^2)$

$$\Rightarrow \delta\ddot\theta + 2\lambda\dot\theta - \Omega^2\left[\sin\theta_0\cos\theta_0 + (\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)\,\delta\theta\right] + \frac{g}{R}\sin\theta_0 + \frac{g}{R}\cos\theta_0\cdot\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot\eta + 2\lambda\dot\eta + \omega_0^2\eta = 0 \quad (2)$$

donde $\eta = \delta\theta + \text{cte}$, t.q. se homogeiniza la EDO y donde

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R}\cos\theta_0 - \Omega^2(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)$$

Para analizar la estabilidad de los ptos. de equilibrio tomamos el ansatz

$$\eta(t) = \eta_0 e^{i\gamma} e^{i\mu t}, \quad \text{con } \mu = \mathrm{Re}(\mu) + i\,\mathrm{Im}(\mu) \in \mathbb{C}$$

reemplazamos en la EoM

$$\Rightarrow -\mu^2\eta(t) + 2\lambda i\mu\,\eta(t) + \omega_0^2\eta(t) = 0 \quad / \cdot \eta^{-1}(t)$$

$$\Rightarrow \mu^2 - \mu\cdot 2i\lambda - \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_{1,2} = i\lambda \pm \sqrt{-\lambda^2 + \omega_0^2}$$

$$= i\lambda \pm \sqrt{-\lambda^2 + \frac{g}{R}\cos\theta_0 - \Omega^2(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)}$$

Notamos que como el ansatz es $\eta(t) \propto e^{i\mu t} = e^{-Im(\mu)t} e^{iRe(\mu)t}$, para que la solución sea estable necesitamos que $\mu \in \mathbb{R}$ o que $Im(\mu) > 0$, entonces nuestro caso límite es cuando $\mu = 0$, o sea para una de las raíces de μ_i t.q.

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R}\cos\theta_0 - \Omega^2(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0) \overset{!}{=} 0 \quad (3)$$

ya que de esta forma $\mu_{1,2} = i\lambda \pm \sqrt{-\lambda^2 + 0} = i\lambda \pm i\lambda \Rightarrow \mu_1 = 2i\lambda$ y $\mu_2 = 0$ donde se cumple que $\mu \in \mathbb{R}$ o $Im(\mu) > 0$.

Mientras que para $\omega_0^2 \neq 0$ tenemos que

$$\mu_{1,2} = i\lambda \pm i\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

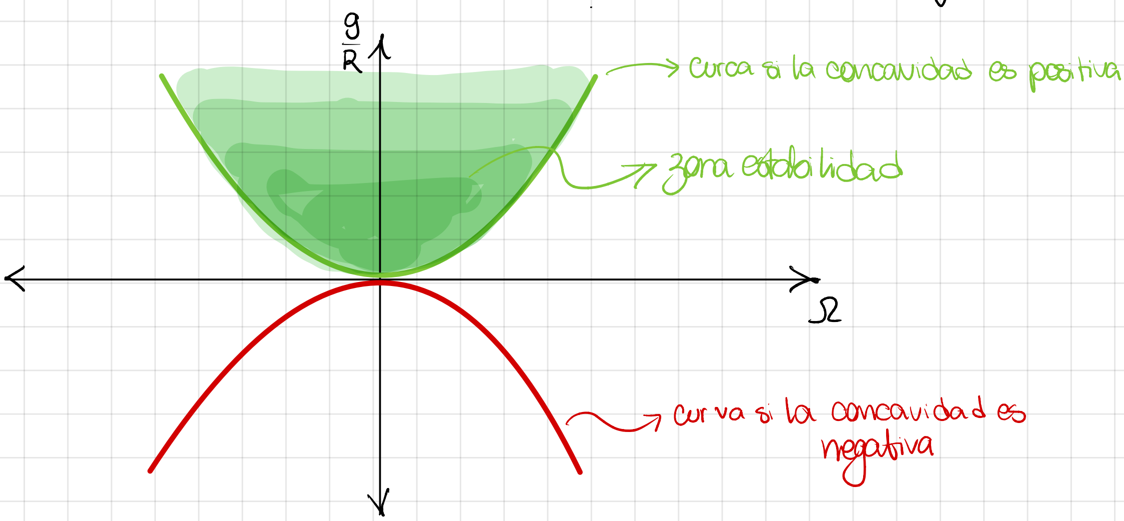
donde $\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < \lambda$ para $\omega_0^2 > 0 \Rightarrow Im(\mu) > 0$, pero $\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} > \lambda$ para $\omega_0^2 < 0$ por lo que uno de los μ_i tendrá $Im(\mu) < 0 \Rightarrow$ inestabilidad

Como (3) define nuestro límite

$$\frac{g}{R} = \frac{(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)}{\cos\theta_0}\Omega^2 \quad (4)$$

para el caso $\sin\theta_0 \overset{!}{=} 0$

que representa una parábola con concavidad $(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)/\cos\theta_0$ en un gráfico g/R v.s. Ω^2



mientras que si consideramos el caso $\cos\theta_0 \overset{!}{=} \frac{g}{R\Omega^2}$, reordenamos (4)

$$\frac{g}{R} = \left(\frac{2\cos^2\theta_0 - 1}{\cos\theta_0}\right)\Omega^2 = \left(\frac{2g^2/R^2\Omega^4 - 1}{g/R\Omega^2}\right)\Omega^2 = \frac{2g}{R} - \frac{R\Omega^4}{g}$$

$$\Leftrightarrow g^2 = R^2\Omega^4 \Rightarrow \frac{g}{R} = \pm\Omega^2$$

que ahora son dos parábolas, una con concavidad $+1$ y la otra con -1

* Para el caso $\sin\theta_0 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \vee \pi$ se obtiene lo mismo, $g/R = \pm\Omega^2$