Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001 – Mecánica

# Auxiliar 5

Dinámica II

**Profesor: Gonzalo Palma**
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi

## P1.- Control 1 2022-2

Una bolita de masa $m$ se desliza sin roce por el interior de una copa. La superficie de la copa está descrita por la función $z = f(\rho)$ donde $z$ y $\rho$ son coordenadas cilíndricas y el eje vertical $\hat{k}$ es el eje de revolución de la copa (ver Figura). Se observa que la bolita se mueve describiendo **un círculo** y manteniendo **constante su altura**.

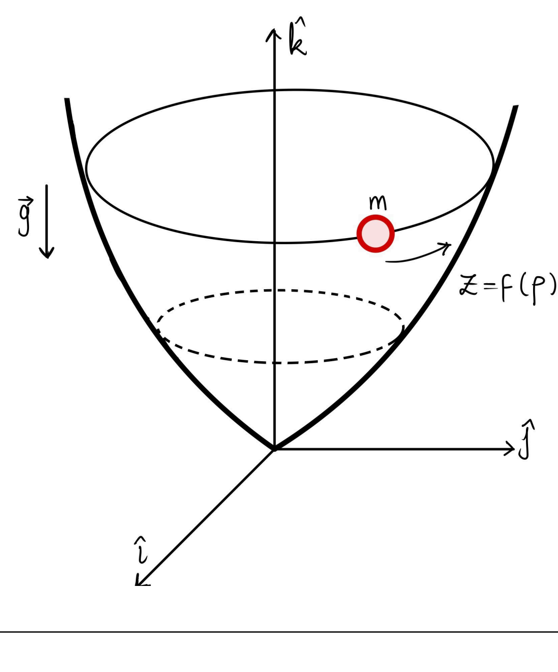
a) Dibuje el DCL de la bolita

b) Escriba las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas

c) Determine la velocidad angular $\omega$ de la bolita en términos de $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\rho}$, el radio del círculo y otras constantes del problema

d) Considere los casos de una copa de martini ($z_m = \rho$) y en una de vino ($z_v = H\left(\frac{\rho}{R}\right)^2$). Determine la velocidad angular $\omega$ en cada caso

e) Si la altura de la bolita en ambas copas es la misma, señale en cuál de ellas la bolita tiene una mayor velocidad angular o si esto depende de alguna condición de los parámetros



## P2.- Fuerza normal no trivial

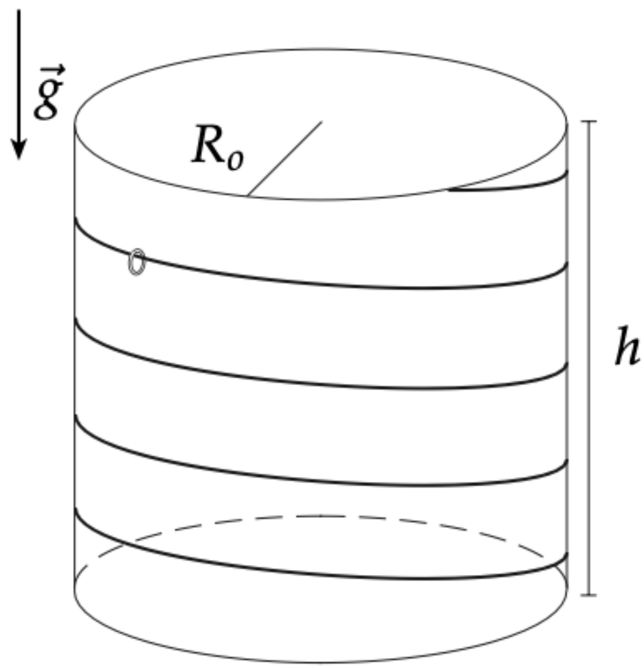
Un anillo de masa $m$ desciende, debido a su propio peso, por un alambre de forma helicoidal de radio $R_0$ y paso tal que $z = h - \phi R_1$. No hay roce anillo-alambre, pero si hay un **roce viscoso**: el anillo es frenado por un roce viscoso lineal $\vec{F} = -c\vec{v}$.

La condición inicial es $\phi(0) = 0$, $z(0) = h$ y $\dot{\phi}(0) = 0$ y la aceleración de gravedad es $g$.

a) Obtenga el vector unitario tangente $\hat{t}$ de la trayectoria y con este encuentre la expresión más general posible para la fuerza normal $\vec{N}$ de este problema.

b) Descomponga la ecuación (vectorial) de movimiento en ecuaciones escalares (lo usual).

c) De las ecuaciones anteriores obtenga la forma explícita de $\omega(t) = \dot{\phi}(t)$ en función de los datos: $m,\ R_0,\ R_1,\ c$ y $g$.



# Formulario

**Coordenadas cilíndricas**

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
&= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}
\end{aligned}$$

**Fuerza normal general**

Por definición, la fuerza normal $\vec{N}$ es **siempre es perpendicular/normal** a la superficie.

El vector unitario **tangente** a la trayectoria de una partícula se calcula como

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}\,,$$

por lo que, en la mayoría de los casos (no todos), se tiene la relación $\hat{t}\cdot\vec{N} = 0$. Esta relación solo se ocupa cuando la partícula sigue una trayectoria no trivial.

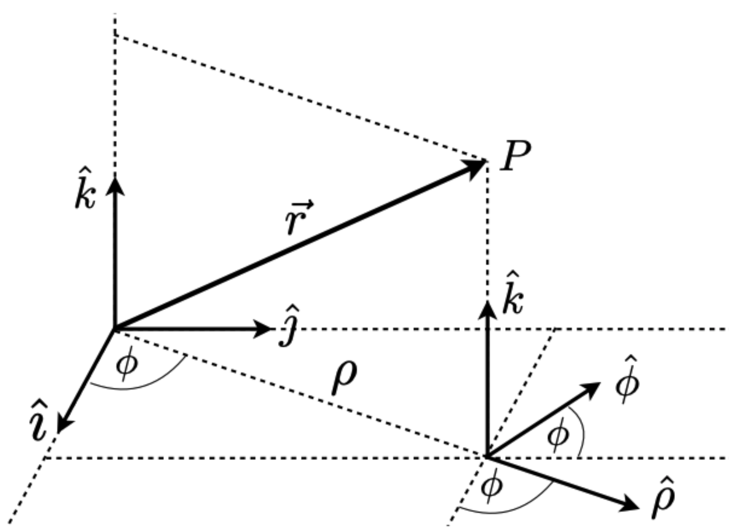



Figura 1: Coordenadas cilíndricas

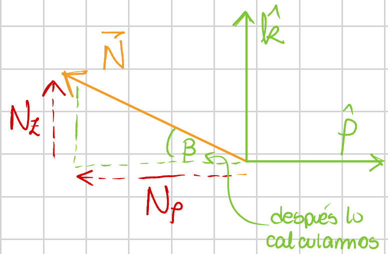
# Auxiliar 5

## P1


Notamos que solo tenemos dos fuerzas actuando sobre la partícula: la normal **perpendicular** a la superficie y el peso en $-\hat{k}$

Por enunciado, debemos elegir un sist. de coord. cilíndricas con origen en la base de la copa

Toca descomponer las fuerzas




- Peso: $\vec{F}_p = -mg\hat{k}$
- Normal: $\vec{N} = N_\rho \hat{\rho} + N_z \hat{k}$

Y para expresar la aceleración (en cilíndricas) usamos que

$$\triangleright\ \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0 \qquad \triangleright\ \dot{z} = \ddot{z} = 0$$

así que tendríamos

el radio de una órbita en específico

$$\vec{a} = (\cancel{\ddot{\rho}}^{\,0} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\,\hat{\phi} + \cancel{\ddot{z}}^{\,0}\hat{k} = -\rho\,\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi}$$

donde ocupamos la expresión con derivada en $\hat{\phi}$ porque no hay fuerzas en $\hat{\phi}$ y por lo tanto hay conservación del momentum angular

Reemplazando en segunda Ley de Newton, $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

$$-m\rho\,\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} = -mg\hat{k} + N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k}$$

con lo que conseguimos la **ec. de movimiento vectorial**. Obtengamos las ecs. escalares

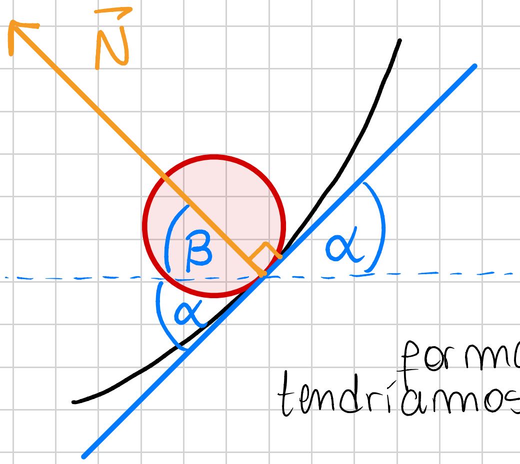
$$\hat{\rho})\ -m\rho\,\dot{\phi}^2 = N_\rho$$

$$\hat{\phi})\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) = 0$$

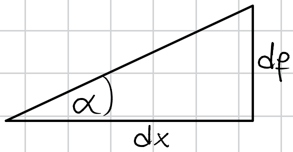
$$\hat{k})\ 0 = -mg + N_z \Rightarrow N_z = mg$$

Donde, recordar que $\rho$ es el radio de la órbita que seguiría la partícula.
Ahora, no conocemos la expresión de $N_\rho$ como para despejar $\dot{\phi}$ de $\hat{\rho})$, por lo que debemos buscar la expresión de esta normal.

Notamos que en $\hat{\rho})$ tenemos la normal en $\hat{\rho}$, pero como sucede siempre, no sabemos su expresión a priori (no hay una fórmula general para la normal, depende del problema), pero geométricamente podemos ver que $N_\rho$ y $N_z$ vienen de la misma normal, por lo que están relacionadas.




Por cálculo diferencial tenemos que la pendiente en un punto $x$ de una curva $f(x)$ es




$$\Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = \tan(\alpha)$$

y esta pendiente es igual a la tangente del ángulo formado con la horizontal. Así que en este problema tendríamos que

$$\tan\alpha = \frac{df(\rho)}{d\rho} = \frac{dz}{d\rho}$$

y tenemos que $\tan\alpha = \tan(\pi/2 - \beta) = \dfrac{1}{\tan\beta}$, por lo que las normales serían

$$\bar{N} = N_\rho \hat{\rho} + N_z \hat{k} \longrightarrow N_\rho = -N\cos\beta \quad \wedge \quad N_z = N\sin\beta$$

y como $\tan = \sin/\cos \Rightarrow \dfrac{1}{\tan\beta} = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} = -\dfrac{N_\rho/N}{N_z/N} = -\dfrac{N_\rho}{N_z}$

$$\therefore \; N_\rho = -\frac{N_z}{\tan\beta} = -N_z\frac{dz}{d\rho} = -mg\frac{dz}{d\rho}$$

por $\hat{k}$)

Ahora sí, reemplazando en $\hat{\rho}$)

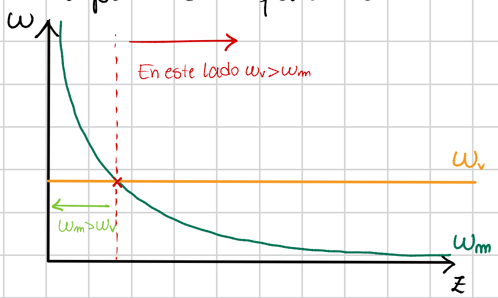
$$\Rightarrow -m\rho\dot{\phi}^2 = -mg\frac{dz}{d\rho}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\phi}(\rho) = \boxed{\sqrt{\frac{g}{\rho}\frac{dz}{d\rho}} = \omega}$$

Reemplazando en ambos casos

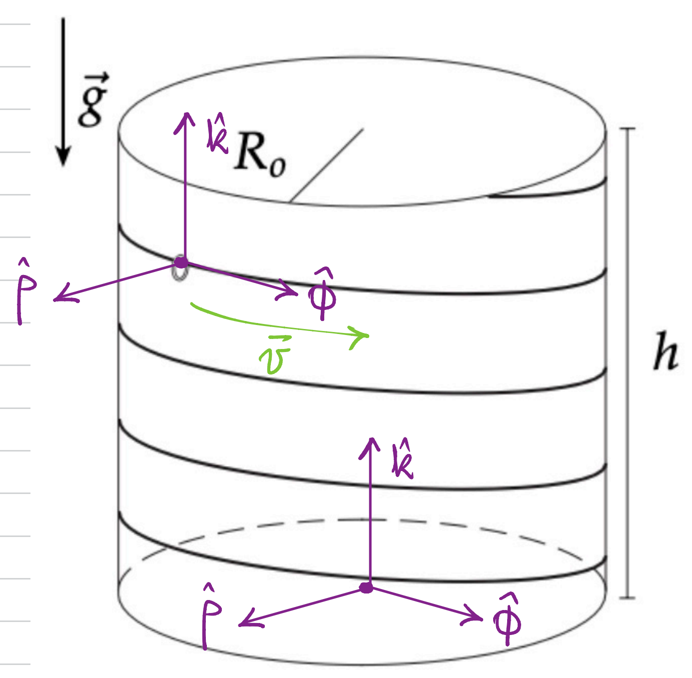
- Martini ($z_m = \rho$): $\dfrac{dz_m}{d\rho} = \dfrac{d\rho}{d\rho} = 1 \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\dfrac{g}{\rho}}$
- Vino ($z_v = H(\rho/R)^2$): $\dfrac{dz_v}{d\rho} = 2H\dfrac{\rho}{R^2} \Rightarrow \omega_v = \sqrt{\dfrac{g}{\rho}\dfrac{2H\rho}{R^2}} = \sqrt{\dfrac{2Hg}{R^2}}$

Para saber cuál tendría mayor velocidad angular, habría que saber la altura en específico, ya que para una altura muy grande $\omega_m \to 0$ (recordar $z_m = \rho$), mientras que $\omega_v$ es constante para cualquier altura



# P2

Por la forma de la trayectoria es obvio elegir coord. cilíndricas




a) Para calcular el vector tangente unitario usamos la fórmula

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

así que primero expresemos la velocidad, donde por la forma de la espiral tenemos:

- $\rho = R_0 \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$
- $z = h - \phi R_1 \Rightarrow \dot{z} = -\dot{\phi} R_1 \Rightarrow \ddot{z} = -\ddot{\phi} R_1$

Reemplazando en la velocidad

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} = R_0\dot{\phi}\hat{\phi} - R_1\dot{\phi}\hat{k}$$

y su magnitud sería

$$\|\vec{v}\| = \dot{\phi}\sqrt{R_0^2 + R_1^2}$$

así que $\hat{t}$ sería:

$$\hat{t} = \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}}\hat{\phi} - \frac{R_1}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}}\hat{k} \quad (1)$$

Ahora, por def. la normal es perpendicular a la superficie, en este caso la espiral que tiene el mismo vector tangente que la trayectoria de la partícula (porque esta sigue la ruta de la espiral), así que tenemos la relación

$$\vec{N} \cdot \hat{t} \overset{!}{=} 0 \quad (2)$$

En este caso, por la forma oblicua y curvilínea de la espiral, tenemos componentes de $\vec{N}$ en las 3 direcciones, o sea,

$$\vec{N} = N_\rho\hat{\rho} + N_\phi\hat{\phi} + N_z\hat{k} \quad (3)$$

así que (1) y (3) en (2)

$$(N_\rho\hat{\rho} + N_\phi\hat{\phi} + N_z\hat{k}) \cdot \left(\frac{R_0}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}}\hat{\phi} - \frac{R_1}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}}\hat{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}}(N_\phi R_0 - N_z R_1) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow N_\phi = N_z\frac{R_1}{R_0} \qquad \boxed{\therefore \vec{N} = N_\rho\hat{\rho} + N_z\frac{R_1}{R_0}\hat{\phi} + N_z\hat{k}}$$

b) Pensemos en las fuerzas aplicándose sobre la partícula

- Gravitacional: $\vec{F}_p = -mg\hat{k}$
- Normal: $\vec{N} = N_\rho\hat{\rho} + N_z\frac{R_1}{R_0}\hat{\phi} + N_z\hat{k}$
- Roce viscoso: $\vec{F}_R = -c\vec{v} = -c\dot{\phi}(R_0\hat{\phi} - R_1\hat{k})$

y la aceleración en cilíndricas sería

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\ &= -R_0\dot{\phi}^2\hat{\rho} + R_0\ddot{\phi}\hat{\phi} - R_1\ddot{\phi}\hat{\phi}\end{aligned}$$

así que la 2da Ley de Newton sería

$$m\vec{a} = \Sigma_i\vec{F}_i$$

$$\Rightarrow m(-R_0\dot{\phi}^2\hat{\rho} + R_0\ddot{\phi}\hat{\phi} - R_1\ddot{\phi}\hat{\phi}) = -mg\hat{k} + N_\rho\hat{\rho} + N_z\frac{R_1}{R_0}\hat{\phi} + N_z\hat{k} - c\dot{\phi}(R_0\hat{\phi} - R_1\hat{k})$$

y las ecs. escalares serían

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{\rho})\ -mR_0\dot{\phi}^2 = N_\rho \\ &\hat{\phi})\ mR_0\ddot{\phi} = N_z\frac{R_1}{R_0} - cR_0\dot{\phi} \\ &\hat{k})\ -mR_1\ddot{\phi} = -mg + N_z + cR_1\dot{\phi}\end{aligned}}$$

c) De las ecs. de $\hat{\phi})$ y $\hat{k})$ podemos despejar $N_z$ (que no conocemos) e igualar

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\phi}) \longrightarrow N_z = \frac{R_0}{R_1}(mR_0\ddot{\phi} + cR_0\dot{\phi}) \\ &\hat{k}) \longrightarrow N_z = -mR_1\ddot{\phi} + mg - cR_1\dot{\phi}\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&mR_0^2\ddot{\phi} + cR_0^2\dot{\phi} = -mR_1^2\ddot{\phi} + mgR_1 - cR_1^2\dot{\phi} \\ &\Leftrightarrow m(R_0^2 + R_1^2)\ddot{\phi} = mgR_1 - c(R_0^2 + R_1^2)\dot{\phi}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi} = C_1 - \frac{c}{m}\dot{\phi}\ ,\quad \text{con } C_1 \equiv \frac{gR_1}{R_0^2 + R_1^2}$$

antes de integrar "escondamos" la parte inhomogénea constante, $C_1$, como

$$\ddot{\phi} = \frac{c}{m}\left(\frac{mC_1}{c} - \dot{\phi}\right)\ ,\quad \text{definimos } \dot{\theta} \equiv \frac{mC_1}{c} - \dot{\phi} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\ddot{\phi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{c}{m}\dot{\theta}$$

que ahora sí podemos integrar

$$\frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{c}{m}dt \qquad / \int_{t=0}^{t}$$

$$\Rightarrow \int_{\dot\theta(t=0)}^{\dot\theta(t)} \frac{d\dot\theta}{\dot\theta} = -\frac{c}{m}\int_0^t dt$$

donde como $\dot\theta(t) = \frac{mc_1}{c} - \dot\phi(t) \Rightarrow \dot\theta(t=0) = \frac{mc_1}{c} - \underbrace{\cancel{\dot\phi(t=0)}}_{=0 \text{ por enunciado}} = \frac{mc_1}{c}$

$$\Rightarrow \ln(\dot\theta(t)) - \ln\left(\frac{mc_1}{c}\right) = -\frac{c}{m}t$$

$$\Rightarrow \dot\theta(t) = \frac{mc_1}{c} - \dot\phi(t) = \frac{mc_1}{c}e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot\phi(t) = \frac{mc_1}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)}$$