

# Auxiliar 5

## Cinemática<sub>2,5</sub>

**Profesor: Andrés Escala**

Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi

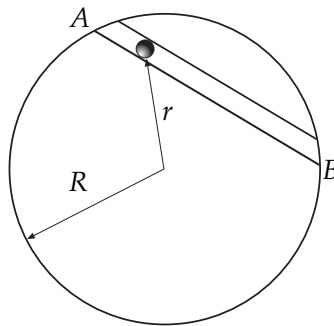
Ayudante: Gerald Barnert

**P1.-** Suponga que es posible excavar un túnel entre dos puntos  $A$  y  $B$  de la Tierra. La aceleración de gravedad (que apunta hacia el centro de la Tierra) al interior del túnel tiene una magnitud que es proporcional a la distancia  $r$  desde el centro de la Tierra:

$$\|\vec{a}\| = \frac{g}{R}r,$$

donde  $g$  es la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra y  $R$  es el radio de la Tierra. Asumiendo que un vehículo parte del reposo en el punto  $A$  y se mueve sin roce en el interior del túnel, bajo el efecto de la gravedad, calcule:

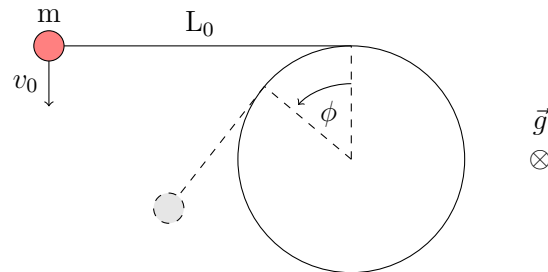
- El tiempo que requiere para llegar al punto  $B$ , que está a una distancia  $R$  del punto  $A$ , en línea recta.
- La rapidez máxima del movimiento resultante.



**P2.-** Considere un poste de sección circular de radio  $R$  colocado verticalmente sobre una superficie horizontal. Una partícula de masa  $m$  se encuentra atada a una cuerda de largo  $L_0$ , cuyo otro extremo se encuentra fijo al poste. El roce entre la partícula y **la superficie horizontal** es despreciable. En un cierto instante, cuando la cuerda se encuentra estirada y en una dirección tangente al poste, se da a la partícula una velocidad inicial  $v_0$ , en dirección perpendicular a la cuerda estirada, como se indica en la Figura.

- Determine la ecuación de movimiento de la partícula  $m$  en un sistema de coordenadas conveniente.

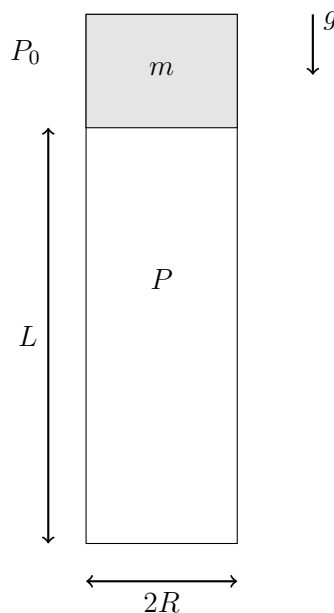
- Obtenga la velocidad angular  $\dot{\phi}$  en función del ángulo  $\phi$  (ángulo de enrollado de la cuerda).
- Suponga que la cuerda se corta cuando la tensión alcanza el valor  $T_{\text{máx}}$ , obtenga el ángulo  $\phi$  de enrollado de la cuerda en ese momento.



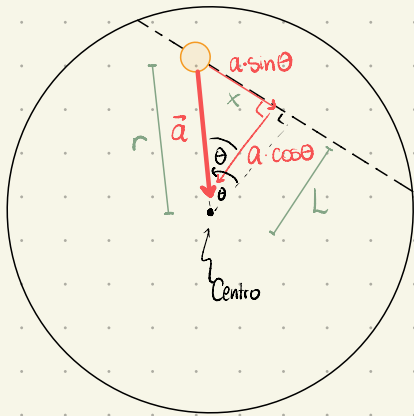
**P3.-** (Propuesto?)

Considere un tubo de radio interno  $R$  y largo  $L$  colocado en posición vertical, con su extremo inferior cerrado. En un cierto instante se suelta en el extremo superior del tubo (y desde el reposo) un émbolo de masa  $m$ , que se mueve hacia abajo por efecto de la gravedad, sin roce con las paredes del tubo, comprimiendo el aire encerrado por debajo de él. A medida que el aire de la cámara inferior se comprime, su presión  $P$  aumenta de modo tal que el producto entre la presión  $P$  y el volumen  $V$  de la cámara se mantiene constante ( $PV = C_0$ , con  $C_0$  conocido). La presión atmosférica fuera del tubo es igual a  $P_0$ .

- Escriba la ecuación de movimiento para el émbolo.
- Determine a que altura el émbolo alcanza su máxima velocidad.
- Determine una ecuación para encontrar la altura mínima que alcanza el émbolo sobre la base del tubo.



# P1



Descomponiendo la aceleración, que es radial, en la dirección del túnel, tenemos que en tal dirección, que podemos definir con  $\hat{i}$ , la aceleración es

$$\vec{a}_x = -|\vec{a}| \cdot \sin\theta \hat{i} = -\frac{g}{R} r \sin\theta$$

Notamos que la distancia al centro depende del ángulo (y viceversa), donde por geometría

$$r(\theta) = \frac{L}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{R^2 - R^2/4}}{\cos\theta} = \frac{R}{2} \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_x = -\frac{g\sqrt{3}}{2} \tan\theta = -\frac{g\sqrt{3}}{2} \frac{x}{L} \hat{i} = -\frac{g}{R} x \hat{i}$$

Ahora, integremos una vez considerando que inicialmente  $x(t=0) = R/2$

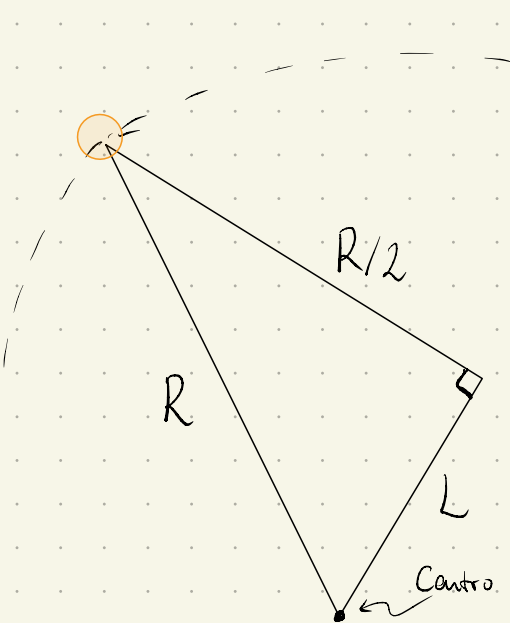


Figura 2: Posición inicial de la partícula

$$\Rightarrow \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{g}{R} x \quad / \int dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\dot{x}} \dot{x} d\dot{x} = -\frac{g}{R} \int_{R/2}^x x dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{g}{2R} \left( \frac{R^2}{4} - x^2 \right) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{\frac{R^2}{4} - x^2}$$

$$\Rightarrow \int_{R/2}^x \frac{dx}{\left(\frac{R^2}{4} - x^2\right)^{1/2}} = \pm \sqrt{\frac{g}{R}} \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{2x}{R}\right) \Big|_{R/2}^x = \pm \sqrt{\frac{g}{R}} \cdot t$$

$$\Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{2x}{R}\right) - \frac{\pi}{2} = \pm \sqrt{\frac{g}{R}} t$$

Queremos saber para qué tiempo  $x = -R/2$

$$\Rightarrow \arcsin(-1) - \frac{\pi}{2} = \pm \sqrt{\frac{g}{R}} t^*$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\sqrt{\frac{g}{R}} t^* \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{R}{g}} \pi$$

Ahora, la rapidez máxima se tiene cuando la aceleración comienza a ser una fuerza que

"tira hacia atrás" a la partícula, o sea,  $x=0$ , donde por (1)

$$\dot{x}^2(x=0) = \frac{g}{R} \frac{R^2}{4} = \frac{gR}{4} \Rightarrow |\dot{x}_{\max}| = \frac{\sqrt{gR}}{2}$$

\* Pueden comprobar este argumento imponiendo que la derivada de la velocidad (la aceleración) sea 0.

# Pauta Auxiliar 5

## Cinemática<sub>2.5</sub>

**Profesor: Andrés Escala**

Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi

Ayudantes: Gerald Barnert

**P2.-**

Considere un poste de sección circular de radio  $R$  colocado verticalmente sobre una superficie horizontal. Una partícula de masa  $m$  se encuentra atada a una cuerda de largo  $L_0$ , cuyo otro extremo se encuentra fijo al poste. El roce entre la partícula y la **superficie horizontal** es despreciable. En un cierto instante, cuando la cuerda se encuentra estirada y en una dirección tangente al poste, se da a la partícula una velocidad inicial  $v_0$ , en dirección perpendicular a la cuerda estirada, como se indica en la Figura.

1. Determine la ecuación de movimiento de la partícula  $m$  en un **sistema de coordenadas conveniente**.
2. Obtenga la velocidad angular  $\dot{\phi}$  en función del ángulo  $\phi$  (ángulo de enrollado de la cuerda).
3. Suponga que la cuerda se corta cuando la tensión alcanza el valor  $T_{\text{máx}}$ , obtenga el ángulo  $\phi$  de enrollado de la cuerda en ese momento.

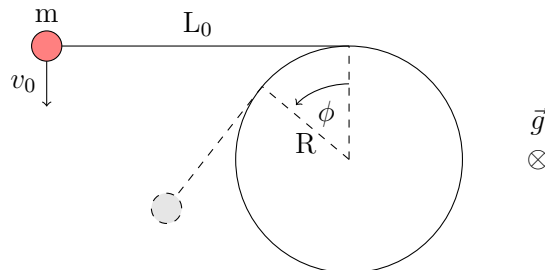


Figura 1

### Respuesta

Usamos coordenadas polares para definir la posición de la masa. El origen del sistema lo ponemos en el centro del círculo (pueden ver [este video](#) para que les quede más claro a que me refiero) y tendríamos:

$$\vec{r} = R\hat{\rho} + (L_0 - R\phi)\hat{\phi},$$

donde  $R$  es la distancia al borde del círculo y el término que acompaña a  $\hat{\phi}$  es el largo de la cuerda medida desde el borde del círculo, que es igual al largo original  $L_0$  menos el tamaño del arco descrito por  $\phi$ . Importante notar que no hay componente de altura, ya que la masa está en contacto con la superficie horizontal y la normal de esta contrarresta la fuerza de gravedad, así que siempre trabajamos en un plano.

Derivamos  $\vec{r}$  con respecto al tiempo,

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= R\dot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}\hat{\phi} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\rho} \\ &= -(L_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\rho}.\end{aligned}$$

Recordar:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\phi}\hat{\phi}; \quad \frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$$

Derivamos nuevamente para encontrar la aceleración:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= R\dot{\phi}^2\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\ddot{\phi}\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi} \\ &= (R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi)\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi},\end{aligned}\tag{1}$$

con lo que conseguimos la ecuación de movimiento.

Ahora, analizando las fuerzas en los distintos componentes, tenemos:

- $\hat{\rho}$ : No hay fuerzas
- $\hat{\phi}$ : La tensión de la cuerda
- $\hat{k}$ : Fuerza de gravedad y la normal de la superficie horizontal, que son iguales en magnitud, pero distinto signo, por lo que se anulan (no atraviesa la superficie ni comienza a subir)

$$\Rightarrow m(R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi)\hat{\rho} - m(L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi} = 0\hat{\rho} - T\hat{\phi},\tag{2}$$

donde la tensión va en el sentido contrario hacia donde crece  $\phi$  (jala a la masa). Con lo que podemos igualar las componentes que acompañan a los mismos vectores unitarios de (2),

$$m(R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi) = 0; \quad -m(L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2 = -T.\tag{3}$$

Con lo que conseguimos nuestras ecuaciones de movimiento!!!!.

Cuando una expresión está igualada a 0, sospechamos que hay cosas que se conservan (a veces no es tan directo y debemos mover algunas cosas), así que notamos que la primera expresión de (3) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi &= \frac{d}{dt}(-\dot{\phi}L_0 + R\dot{\phi}\phi) = 0 \\ \Rightarrow -\dot{\phi}L_0 + R\dot{\phi}\phi &= \text{constante}\end{aligned}$$

O sea,  $\dot{\phi}L_0 - R\dot{\phi}\phi$  mantiene su valor en todo el movimiento, así que en cualquier momento debe ser igual a sus valores iniciales, donde  $\phi_0 = 0$  y para  $\dot{\phi}_0$  analizamos la expresión de la velocidad que expresamos al inicio:

$$\vec{v} = -(L_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\rho},$$

y en  $t = 0$  sabemos que la velocidad es de la forma:

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= -v_0 \hat{\rho} \\ \Rightarrow -v_0 &= -(L_0 - R \cdot 0) \dot{\phi}_0 \\ \Rightarrow \dot{\phi}_0 &= \frac{v_0}{L_0},\end{aligned}$$

con esta expresión de  $\dot{\phi}_0$  y  $\phi_0$  podemos seguir trabajando con la conservación que encontramos para obtener una expresión de  $\dot{\phi}$ ,

$$\begin{aligned}\Rightarrow -\dot{\phi} L_0 + R \dot{\phi} \phi &= -v_0 \\ \Leftrightarrow \dot{\phi} &= \frac{v_0}{L_0 - R\phi},\end{aligned}$$

con lo que conseguimos expresar la velocidad angular en función del ángulo.

Finalmente, en (3) tenemos una expresión para la tensión en función del ángulo y la velocidad angular que podemos reemplazar con lo conseguido,

$$\Rightarrow T = m(L_0 - R\phi) \left( \frac{v_0}{L_0 - R\phi} \right)^2 = \frac{mv_0^2}{L_0 - R\phi}.$$

Notamos que  $T$  crece cuando aumentamos  $\phi$  desde  $\phi_0 = 0$ , hasta que  $L_0 - R\phi_1 = 0$ , donde el valor de la tensión explota, así que, según enunciado, la cuerda se cortaría en este punto  $\phi_1 = L_0/R$ .

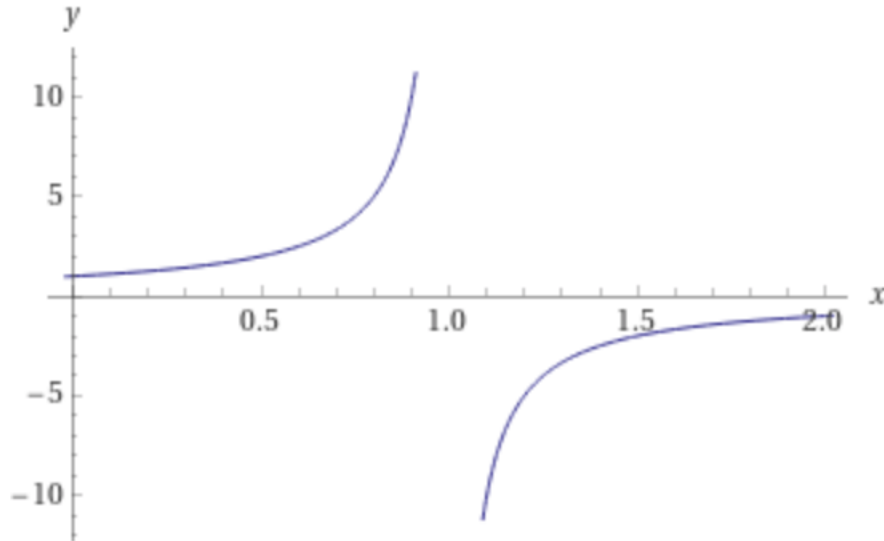


Figura 2: Forma de  $T$ , para  $m = v_0 = R = L_0 = 1$