Auxiliar 5

Dinámica y coordenadas cilíndricas

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.-

Considere un poste de sección circular de radio R colocado verticalmente sobre una superficie horizontal. Una partícula de masa m se encuentra atada a una cuerda de largo L_0, cuyo otro extremo se encuentra fijo al poste. El roce entre la partícula y **la superficie horizontal** es despreciable. En un cierto instante, cuando la cuerda se encuentra estirada y en una dirección tangente al poste, se da a la partícula una velocidad inicial v_0, en dirección perpendicular a la cuerda estirada, como se indica en la Figura.

1. Determine la ecuación de movimiento de la partícula m en un sistema de coordenadas conveniente.
2. Obtenga la velocidad angular $\dot{\phi}$ en función del ángulo ϕ (ángulo de enrollado de la cuerda).
3. Suponga que la cuerda se corta cuando la tensión alcanza el valor $T_{\text{máx}}$, obtenga el ángulo ϕ de enrollado de la cuerda en ese momento.

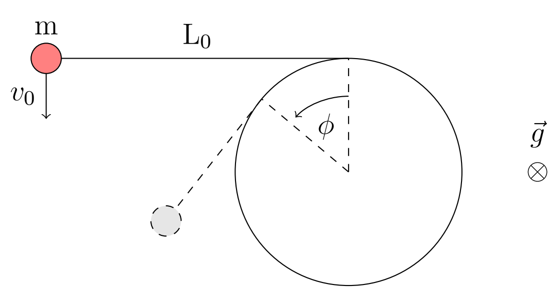

Figura 1

P2.-

Considere un tubo de radio interno R y largo L colocado en posición vertical, con su extremo inferior cerrado. En un cierto instante se suelta en el extremo superior del tubo (y desde el reposo) un émbolo de masa m, que se mueve hacia abajo por efecto de la gravedad, sin roce con las paredes del tubo, comprimiendo el aire encerrado por debajo de él. A medida que el aire de la cámara inferior se comprime, su presión P aumenta de modo tal que el producto entre la presión P y el volumen V de la cámara se mantiene constante ($PV = C_0$, con C_0 conocido). La presión atmosférica fuera del tubo es igual a P_0.

1. Escriba la ecuación de movimiento para el émbolo.

2. Determine a que altura el émbolo alcanza su máxima velocidad.

3. Determine una ecuación para encontrar la altura mínima que alcanza el émbolo sobre la base del tubo.

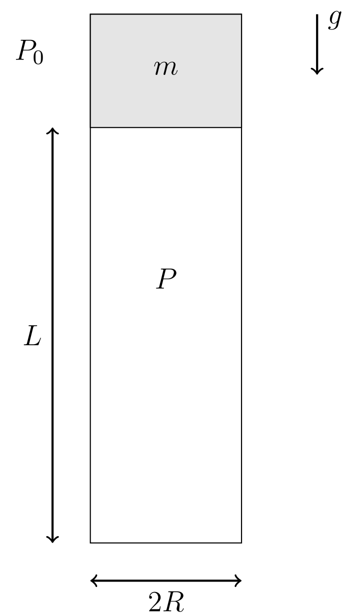

Figura 2

P3.- [**Propuesto**]

Una partícula de masa m se mueve sin roce sobre la superficie externa de un cono con semiángulo de apertura α. La masa está unida a una cuerda que pasa por el vértice del cono y es recogida con una velocidad v_0, como se observa en la Figura. Inicialmente la masa se encuentra a una distancia L del vértice del cono y girando con una velocidad angular ω_0 con respecto al eje del cono.

1. ¿En algún momento la masa podría despegarse de la superficie del cono?, si es así, ¿a qué distancia del vértice?

2. Calcule la tensión de la cuerda en el momento que esto suceda.

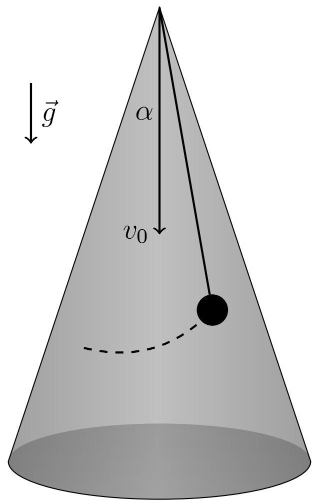

Figura 3

Pauta Auxiliar 5

Dinámica y coordenadas cilíndricas

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.-

Considere un poste de sección circular de radio R colocado verticalmente sobre una superficie horizontal. Una partícula de masa m se encuentra atada a una cuerda de largo L_0, cuyo otro extremo se encuentra fijo al poste. El roce entre la partícula y la **superficie horizontal** es despreciable. En un cierto instante, cuando la cuerda se encuentra estirada y en una dirección tangente al poste, se da a la partícula una velocidad inicial v_0, en dirección perpendicular a la cuerda estirada, como se indica en la Figura.

1. Determine la ecuación de movimiento de la partícula m en un sistema de coordenadas conveniente.
2. Obtenga la velocidad angular $\dot{\phi}$ en función del ángulo ϕ (ángulo de enrollado de la cuerda).
3. Suponga que la cuerda se corta cuando la tensión alcanza el valor $\mathrm{T}_{\text{máx}}$, obtenga el ángulo ϕ de enrollado de la cuerda en ese momento.

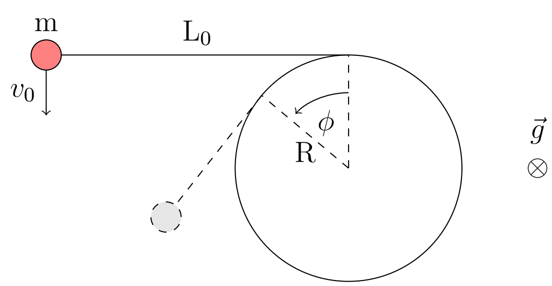

Figura 1

Respuesta

Usamos coordenadas polares para definir la posición de la masa. El origen del sistema lo ponemos en el centro del círculo y tendríamos:

$$\vec{r} = R\hat{\rho} + (L_0 - R\phi)\hat{\phi},$$

donde R es la distancia al borde del círculo y el término que acompaña a $\hat{\phi}$ es el largo de la cuerda medida desde el borde del círculo, que es igual al largo original L_0 menos el tamaño del arco descrito por ϕ. Importante notar que no hay componente de altura, ya que la masa está en contacto con la superficie horizontal y la normal de esta contrarresta la fuerza de gravedad, así que siempre trabajamos en un plano.

Derivamos $\vec{r}$ con respecto al tiempo,

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= R\dot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}\hat{\phi} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\rho} \\ &= -(L_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\rho}.\end{aligned}$$

Recordar:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\phi}\hat{\phi}; \quad \frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$$

Derivamos nuevamente para encontrar la aceleración:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= R\dot{\phi}^2\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\ddot{\phi}\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi} \\ &= (R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi)\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi},\end{aligned} \tag{1}$$

con lo que conseguimos la ecuación de movimiento.

Ahora, analizando las fuerzas en los distintos componentes, tenemos:

- $\hat{\rho}$: No hay fuerzas
- $\hat{\phi}$: La tensión de la cuerda
- $\hat{k}$: Fuerza de gravedad y la normal de la superficie horizontal, que son iguales en magnitud, pero distinto signo, por lo que se anulan (no atraviesa la superficie ni comienza a subir)

$$\Rightarrow m(R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi)\hat{\rho} - m(L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi} = 0\hat{\rho} - T\hat{\phi}, \tag{2}$$

donde la tensión va en el sentido contrario hacia donde crece ϕ (jala a la masa). Con lo que podemos igualar las componentes que acompañan a los mismos vectores unitarios de (2),

$$m(R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi) = 0; \quad -m(L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2 = -T \tag{3}$$

Cuando una expresión está igualada a 0, sospechamos que hay cosas que se conservan, así que notamos que la primera expresión de (3) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi &= \frac{d}{dt}\left(-\dot{\phi}L_0 + R\dot{\phi}\phi\right) = 0 \\ &\Rightarrow -\dot{\phi}L_0 + R\dot{\phi}\phi = \text{constante}\end{aligned}$$

O sea, $\dot{\phi}L_0 - R\dot{\phi}\phi$ mantiene su valor en todo el movimiento, así que en cualquier momento debe ser igual a sus valores iniciales, donde $\phi_0 = 0$ y $\dot{\phi}_0 = v_0/L_0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow -\dot{\phi}L_0 + R\dot{\phi}\phi = -v_0 \\ &\Leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{L_0 - R\phi},\end{aligned}$$

con lo que conseguimos expresar la velocidad angular en función del ángulo.

Finalmente, en (3) tenemos una expresión para la tensión en función del ángulo y la velocidad angular que podemos reemplazar con lo conseguido,

$$\Rightarrow T = m(L_0 - R\phi)\left(\frac{v_0}{L_0 - R\phi}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{L_0 - R\phi}.$$

Notamos que T crece cuando aumentamos ϕ desde $\phi_0 = 0$, hasta que $L_0 - R\phi_1 = 0$, donde el valor de la tensión explota, así que, según enunciado, la cuerda se cortaría en este punto $\phi_1 = L_0/R$.

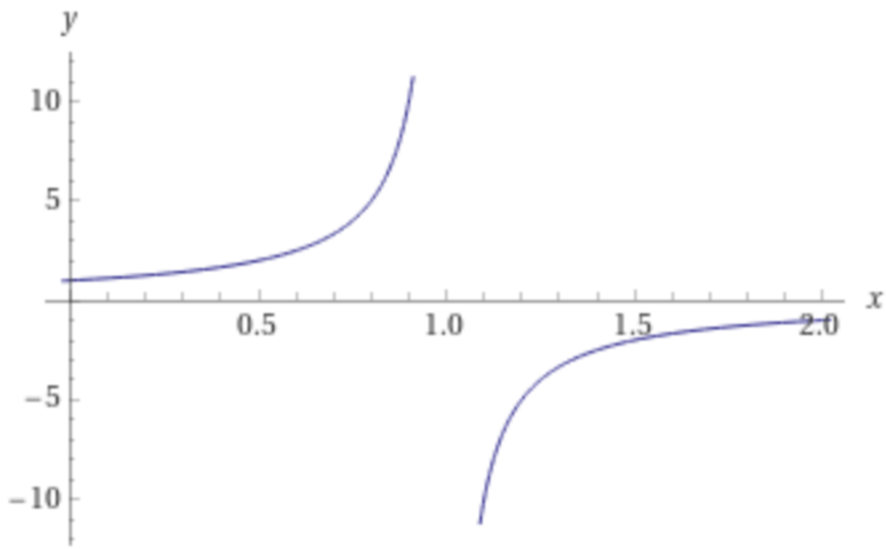

Figura 2: Forma de T, para $m = v_0 = R = L_0 = 0$

$\boxed{\textbf{P2.-}}$

Considere un tubo de radio interno R y largo L colocado en posición vertical, con su extremo inferior cerrado. En un cierto instante se suelta el extremo superior del tubo (y desde el reposo) un émbolo de masa m, que se mueve hacia abajo por efecto de la gravedad, sin roce con las paredes del tubo, comprimiendo el aire encerrado por debajo de él. A medida que el aire de la cámara inferior se comprime, su presión P aumenta de modo tal que el producto entre la presión P y el volumen V de la cámara se mantiene constante ($PV = C_0$, con C_0 conocido). La presión atmosférica fuera del tubo es igual a P_0.

1. Escriba la ecuación de movimiento para el émbolo.

2. Determine a que altura el émbolo alcanza su máxima velocidad.

3. Determine una ecuación para encontrar la altura mínima que alcanza el émbolo sobre la base del tubo.

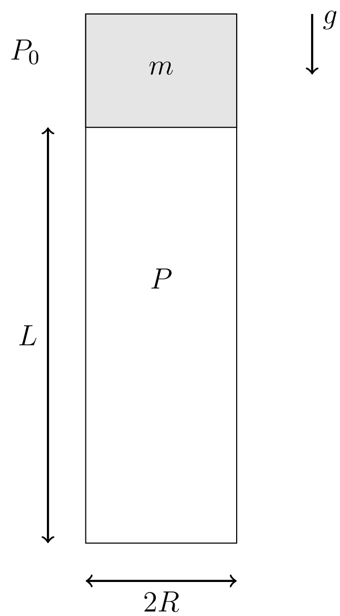

Figura 3

Sabemos que la presión atmosférica genera una fuerza hacia abajo a los objetos en la Tierra. La presión dentro del tubo va aumentando cuando disminuye el volumen, y esta genera una fuerza sobre el émbolo que apunta hacia arriba, o sea, se resiste a que el émbolo baje.

La fuerza ejercida por una presión se calcula como:

$$F_p = A \cdot P,$$

donde P es la presión y A es el área sobre la cual actúa, en este caso el área de las caras del émbolo $A = \pi R^2$. También se tiene la fuerza ejercida por la gravedad, así que en total tenemos 3 fuerzas aplicadas sobre el émbolo:

$$\vec{F}_P = \pi R^2 P \hat{k}$$
$$\vec{F}_{P_0} = -\pi R^2 P_0 \hat{k}$$
$$\vec{F}_g = -gm\hat{k}$$

donde los signos están dados por hacia dónde apunta la fuerza y se elige un sistema de coordenadas cartesiano con origen en la base del tubo. Para encontrar la expresión de la presión producida en la parte interior del tubo, bajo el émbolo, usamos la relación dada en el enunciado para la presión y el volumen, sabiendo que el volumen se calcula como $V = \pi R^2 z$, donde z es la altura a la que se encuentra la parte de abajo del émbolo, medido desde la base del tubo. Así que la presión quedaría como $P = C_0/V = C_0/\pi R^2$, por ende, la fuerza producida por esta presión es:

$$\vec{F}_P = \frac{C_0}{z}\hat{k}$$

Como se ve, las fuerzas son ejercidas únicamente en el eje vertical, así que la sumatoria de fuerzas en este eje sería:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_i &= \vec{F}_P + \vec{F}_{P_0} + \vec{F}_g \\ &= \frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm.\end{aligned}$$

Utilizando la segunda ley de Newton, $F = ma$, obtenemos:

$$m\ddot{z} = \frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm, \tag{4}$$

ocupamos *el trucazo de mecánica* para la segunda derivada de la altura/posición,

$$m\dot{z}\frac{d\dot{z}}{dz} = \frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm,$$

e integramos utilizando como posición inicial $z_0 = L$ que es desde donde se suelta el émbolo con velocidad inicial $\dot{z}_0 = 0$, ya que se suelta desde el reposo,

$$\begin{aligned} m\int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}} \dot{z}\frac{d\dot{z}}{dz}dz &= \int_{z_0}^{z}\left(\frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm\right)dz \\ m\int_0^{\dot{z}} \dot{z}d\dot{z} &= \int_L^z \frac{C_0}{z}dz - (\pi R^2 P_0 + gm)\int_L^z dz \end{aligned}$$

$$m\frac{\dot{z}^2}{2} = C_0 \ln\frac{z}{L} - (\pi R^2 P_0 + gm)(z - L) \tag{5}$$

Ahora, para encontrar los máximos y mínimos que nos piden, igualamos a 0 las derivadas de estas cantidades. Si una curva tiene una forma cóncava (carita triste :C) el punto en el que la derivada es 0 corresponde al máximo, mientras que si una curva es convexa (carita feliz C:), la derivada es 0 en el mínimo.

Entonces, para encontrar la altura donde la velocidad es máxima ocupamos la derivada de esta con respecto al tiempo, o sea, la aceleración con la expresión de (4):

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{z}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \ddot{z} = 0 \Rightarrow \frac{C_0}{z_{v_{máx}}} - \pi R^2 P_0 - gm = 0 \\ \Rightarrow z_{v_{máx}} = \frac{C_0}{\pi R^2 P_0 + mg}.\end{aligned}$$

Y por último, para calcular la altura mínima, ocupamos dónde la velocidad se hace 0 (deja de bajar) utilizando la expresión de (5):

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Leftrightarrow \dot{z} = 0 \Rightarrow C_0 \ln\frac{z_{mín}}{L} - (\pi R^2 P_0 + gm)(z_{mín} - L) = 0,$$

que se puede calcular numéricamente para constantes dadas.

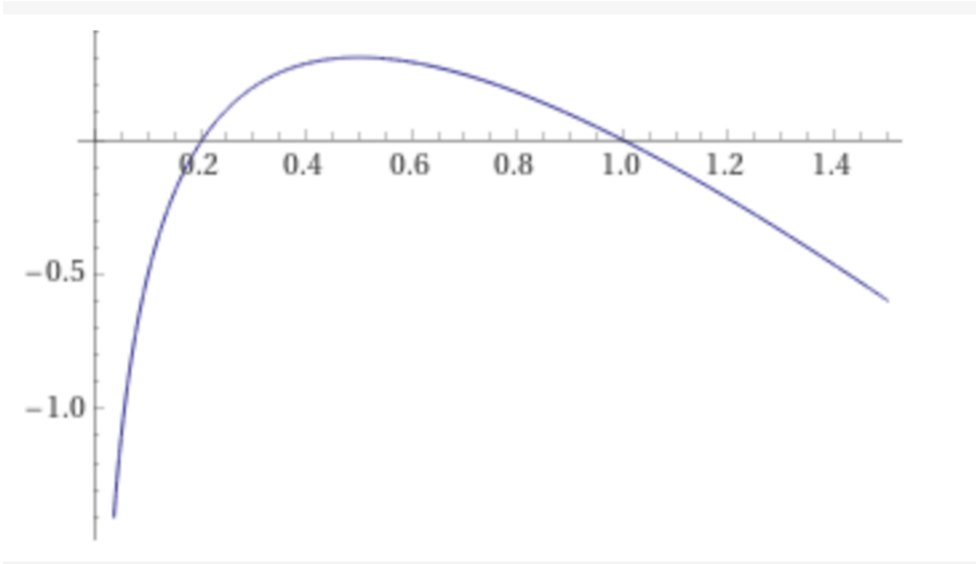

Figura 4: Forma de la expresión para encontrar la altura mínima para $L = 1$. Donde debemos tomar la primera intersección con el eje x, ya que el otro punto corresponde al punto más alto (donde la derivada también es 0).