Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI3111 – Mecánica Clásica

Auxiliar 4

Sólido rígido II: Ángulos de Euler

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

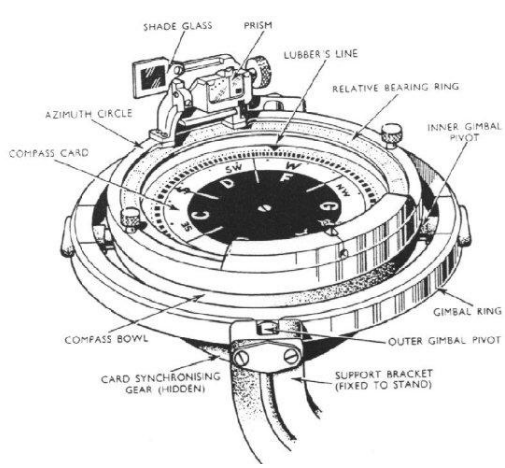
P1.- Gircompás

Considere un giroscopio simétrico (con $I_1 \neq I_2 = I_3$) que se encuentra en un punto fijo en la superficie de la Tierra a una latitud $\pi/2 - \delta$ (ángulo medido desde el Ecuador hasta la posición del objeto). El eje de simetría del giroscopio solo se puede mover en el plano tangente a la Tierra y esta se encuentra rotando con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$.

a) Utilice distintas rotaciones para expresar las distintas velocidades angulares en un sistema de coordenadas fijo al giroscopio

b) Encuentre las ecuaciones de movimiento y los equilibrios del sistema

c) Considere que la velocidad de giro del giroscopio es mucho más grande en magnitud que la velocidad de rotación de la Tierra, $\dot{\psi} \gg \Omega$, ¿cómo sería el equilibrio que encontró en b)? Concluya de por qué este objeto puede ser usado como una brújula



(a) Girocompás

(b) De cuando hice aux en Caltech 1963

Formulario

Sólido rígido

El Lagrangiano de un sólido rígido puede ser escrito como

$$L = K - U = \frac{1}{2}M|\dot{\vec{R}}_{\text{CM}}|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}^t I_{\text{CM}}\vec{\omega} - U = \frac{1}{2}\vec{\omega}^t I_{\mathcal{O}'}\vec{\omega} - U,$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del sólido, $I_{\mathcal{O}'}$ la matriz de inercia calculada c/r a un punto $\mathcal{O}'$ **fijo** tanto en el sólido como en el espacio y U la energía potencial.

Ángulos de Euler

La velocidad angular de un sólido rígido en un sistema de coordenadas **fijo al cuerpo** puede ser escrita en función de los ángulos de Euler θ, ϕ, ψ como:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Matrices de rotación

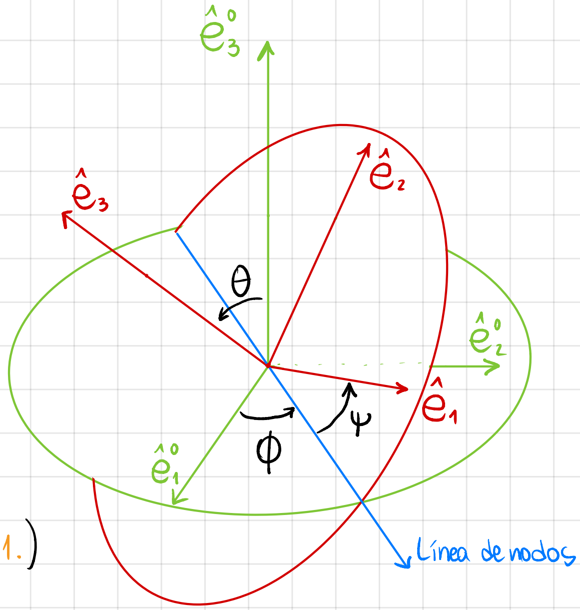
Para pasar de un sistema $\{\hat{e}_i\}$ a un sistema rotado $\{\hat{e}'_i\}$ con respecto a $\{\hat{e}_i\}$, a $\{\hat{e}_i\}$ se le debe aplicar alguna de las siguientes rotaciones:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auxiliar 4

P1



Si tenemos la velocidad angular de un sólido expresada en un sist. inercial con coord. $\{\hat{e}_i^{\,0}\}$, podemos escribirla en el sist. de coord. del sólido $\{\hat{e}_i\}$ haciendo una serie de rotaciones.

Por ej. para los ángulos de Euler hacemos 3 rotaciones (con lo que tendríamos una velocidad angular de 3 componentes general)

1. Rotación de ángulo ϕ c/r a $\hat{e}_3^{\,0}$
2. Rotación de ángulo θ c/r a $\hat{e}_1^{\,0'}$ (el nuevo eje $\hat{x}$ luego de 1.)
3. Rotación de ángulo ψ c/r a $\hat{e}_3$ (el nuevo eje $\hat{z}$ luego de 1. y 2.)

Por lo que la velocidad angular sería la suma de estas 3 velocidades rotacionales

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{e}_3^{\,0} + \dot{\theta}\,\hat{e}_1^{\,0'} + \dot{\psi}\,\hat{e}_3$$

donde tenemos una combinación de sist. y queremos que todo esté en $\{\hat{e}_i\}$, pero tenemos que para pasar de un vector expresado en $\{\hat{e}_i^{\,0}\}$ a escribirlo en $\{\hat{e}_i\}$ hacemos

$$\begin{pmatrix}\hat{e}_1\\ \hat{e}_2\\ \hat{e}_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{3.}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{2.}\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{1.}\begin{pmatrix}\hat{e}_1^{\,0}\\ \hat{e}_2^{\,0}\\ \hat{e}_3^{\,0}\end{pmatrix}$$

pero solo tenemos $\dot{\phi}\,\hat{e}_3^{\,0}$ así que

$$\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{\phi}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi\\ \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi\\ \dot{\phi}\cos\theta\end{pmatrix} = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi\,\hat{e}_1 + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi\,\hat{e}_2 + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_3$$

Y para pasar de $\{\hat{e}_i^{\,0'}\}$ a $\{\hat{e}_i\}$ sería

$$\begin{pmatrix}\hat{e}_1\\ \hat{e}_2\\ \hat{e}_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{3.}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{2.}\begin{pmatrix}\hat{e}_1^{\,0'}\\ \hat{e}_2^{\,0'}\\ \hat{e}_3^{\,0'}\end{pmatrix}$$

pero solo tenemos $\dot{\theta}\,\hat{e}_1^{0'}$ así que hacemos

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta}\cos\psi\,\hat{e}_1 - \dot{\theta}\sin\psi\,\hat{e}_2$$

y $\dot{\psi}\,\hat{e}_3$ ya está en $\{\hat{e}_i\}$ así que juntando todo

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)\hat{e}_1 + (-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)\hat{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{e}_3$$

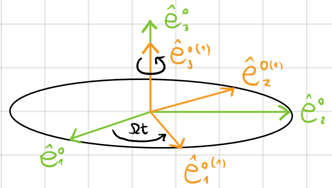
que es la vel. ang. del sólido en el sist. fijo a él.

Pregunta como tal

Debido a que nuestro problema tiene múltiples rotaciones, haremos lo mismo que antes. Empecemos con un sist. inercial fijo que no rota justo en el centro de la Tierra $\{\hat{e}_i^0\}$

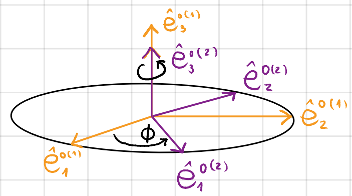
1. Rotación de ángulo Ωt c/r a $\hat{e}_3^0$ para obtener un sist. $\{\hat{e}_i^{0(1)}\}$ solidario con la rotación de la Tierra

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1^{0(1)} \\ \hat{e}_2^{0(1)} \\ \hat{e}_3^{0(1)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_1(\Omega t)}\begin{pmatrix} \hat{e}_1^0 \\ \hat{e}_2^0 \\ \hat{e}_3^0 \end{pmatrix}$$



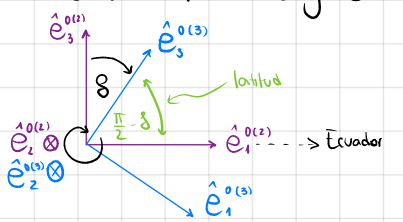
2. Rotación de ángulo ϕ c/r a $\hat{e}_3^{0(1)}$ para que $\hat{e}_1^{0(2)}$ apunte en la misma latitud en la que se encuentra el giroscopio

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1^{0(2)} \\ \hat{e}_2^{0(2)} \\ \hat{e}_3^{0(2)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_2(\phi)}\begin{pmatrix} \hat{e}_1^{0(1)} \\ \hat{e}_2^{0(1)} \\ \hat{e}_3^{0(1)} \end{pmatrix}$$



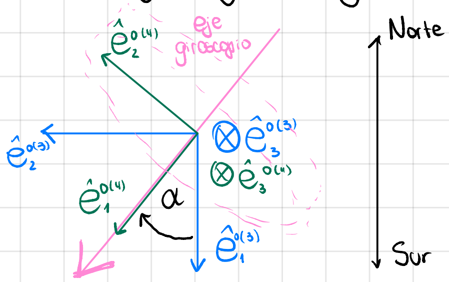
3. Rotación de ángulo δ c/r a $\hat{e}_2^{0(2)}$ para que $\hat{e}_3^{0(3)}$ apunte en la dirección radial $\hat{r}$ hacia el giroscopio.

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1^{0(3)} \\ \hat{e}_2^{0(3)} \\ \hat{e}_3^{0(3)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\delta & 0 & -\sin\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\delta & 0 & \cos\delta \end{pmatrix}}_{R_3(\delta)}\begin{pmatrix} \hat{e}_1^{0(2)} \\ \hat{e}_2^{0(2)} \\ \hat{e}_3^{0(2)} \end{pmatrix}$$



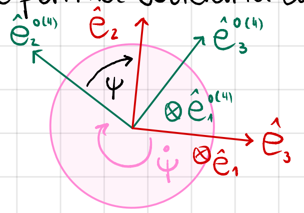
4. Rotación de ángulo α c/r a $\hat{e}_3^{0(3)}$ para que $\hat{e}_1^{0(4)}$ apunte en la dirección del eje de giro del giroscopio

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1^{0(4)} \\ \hat{e}_2^{0(4)} \\ \hat{e}_3^{0(4)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_4(\alpha)}\begin{pmatrix} \hat{e}_1^{0(3)} \\ \hat{e}_2^{0(3)} \\ \hat{e}_3^{0(3)} \end{pmatrix}$$



5. Rotación de ángulo ψ c/r a $\hat{e}_1^{0(4)}$ para que $\hat{e}_1$ esté girando de forma solidaria al giroscopio

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}}_{R_5(\psi)} \begin{pmatrix} \hat{e}_1^{0(4)} \\ \hat{e}_2^{0(4)} \\ \hat{e}_3^{0(4)} \end{pmatrix}$$



Con lo que obtuvimos un método para transformar desde distintos sistemas al sist. $\{\hat{e}_i\}$ fijo al osciloscopio

Notamos que no todos los ángulos tienen asociados velocidades (sus derivados son 0), debido a que la posición del CM está fija en algún punto de la Tierra. El ángulo ϕ es un desfase de longitud del ángulo Ωt y δ es la latitud fija del giroscopio.

La velocidad angular del giroscopio sería

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\hat{e}_1^{0(4)} + \dot{\alpha}\,\hat{e}_3^{0(3)} + \Omega\,\hat{e}_3^{0}$$

que tenemos que escribir en el sist. solidario al giroscopio $\{\hat{e}_i\}$, por lo que ocupamos las transformaciones definidas

$$\vec{\omega} = R_5(\psi)\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_5(\psi)R_4(\alpha)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} + R_5(\psi)R_4(\alpha)R_3(\delta)R_2(\phi)R_1(\Omega t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\psi} - \Omega\sin\delta\cos\alpha \\ \dot{\alpha}\sin\psi + \Omega(\sin\delta\sin\alpha\cos\psi + \cos\delta\sin\psi) \\ \dot{\alpha}\cos\psi + \Omega(-\sin\delta\sin\alpha\sin\psi + \cos\delta\cos\psi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \hat{e}_1 \\ \leftarrow \hat{e}_2 \\ \leftarrow \hat{e}_3 \end{matrix}$$

Con esto podemos escribir el Lagrangiano donde $I_2 = I_3$ con I_i los momentos de inercia calculados c/r a los ejes principales

$$L = \frac{1}{2}M|\dot{\vec{R}}_{CM}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} I_i\omega_i^2 \quad , \text{donde } |\dot{\vec{R}}_{CM}|^2 = R_\oplus^2\Omega^2\sin^2\delta \text{ constante}$$

$$= K_{T0} + \frac{1}{2}I_1(\dot{\psi} - \Omega\sin\delta\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}I_2\Big\{(\dot{\alpha}\sin\psi + \Omega(\sin\delta\sin\alpha\cos\psi + \cos\delta\sin\psi))^2$$
$$+ (\dot{\alpha}\cos\psi + \Omega(-\sin\delta\sin\alpha\sin\psi + \cos\delta\cos\psi))^2\Big\}$$

$$= K_{T0} + \frac{1}{2}I_1(\dot{\psi} - \Omega\sin\delta\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}I_2\left(\dot{\alpha}^2 + \Omega^2(\cos^2\delta + \sin^2\alpha\sin^2\delta) + 2\dot{\alpha}\Omega\cos\delta\right)$$

$$= K_{T0} + \frac{1}{2}I_1(\dot{\psi} - \Omega\sin\delta\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}I_2\Omega^2\sin^2\delta\sin^2\alpha + \frac{1}{2}I_2(\Omega^2\cos^2\delta + 2\dot{\alpha}\Omega\cos\delta)$$

donde podemos considerar el primer y último término como la derivada total de

$$f = \left(K_{T0} + \frac{1}{2}I_2\Omega^2\cos^2\delta\right)t + \alpha I_2\Omega\cos\delta$$

por lo que estos términos no afectan la dinámica

$$\Rightarrow L \equiv \frac{1}{2} I_1(\dot{\psi} - \Omega \sin\delta \cos\alpha)^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_2 \Omega^2 \sin^2\delta \sin^2\alpha$$

Calculamos las E-L:

▷ $\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$ ▷ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_1(\dot{\psi} - \Omega \sin\delta \cos\alpha) = C_1$

▷ $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = I_1(\dot{\psi} - \Omega \sin\delta \cos\alpha)\, \Omega \sin\delta \sin\alpha + I_2 \Omega^2 \sin^2\delta \sin\alpha \cos\alpha$

▷ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = I_2 \dot{\alpha} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) = I_2 \ddot{\alpha}$

$$\therefore\ I_2 \ddot{\alpha} = I_1(\dot{\psi} - \Omega \sin\delta \cos\alpha)\, \Omega \sin\delta \sin\alpha + I_2 \Omega^2 \sin^2\delta \sin\alpha \cos\alpha$$

$$= C_1 \Omega \sin\delta \sin\alpha + I_2 \Omega^2 \sin^2\delta \sin\alpha \cos\alpha$$

Notamos que esta EoM tiene equilibrios en $\alpha = 0$ y π, si nos centramos en $\alpha = \pi$ hacemos una expansión del estilo

$$\alpha(t) = \pi + \epsilon(t) \quad \text{con } |\epsilon(t)| \ll 1 \ \forall t$$

entonces reemplazando $\sin(\pi + \epsilon) = \underbrace{\cancel{\sin\pi}}_{0} \cos\epsilon + \underbrace{\cancel{\cos\pi}}_{=-1} \sin\epsilon \approx -\epsilon$

$$\sin(\pi+\epsilon)\cos(\pi+\epsilon) \approx -\epsilon\left(\underbrace{\cancel{\cos\pi}}_{=-1} \underbrace{\cancel{\cos\epsilon}}_{=1} - \underbrace{\cancel{\sin\pi}}_{0} \sin\epsilon\right) \approx \epsilon$$

$$\Rightarrow I_2 \ddot{\epsilon} = -C_1 \Omega \sin\delta \cdot \epsilon + I_2 \Omega^2 \sin^2\delta \cdot \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\epsilon} = \left[-\frac{C_1}{I_2} \Omega \sin\delta + \Omega^2 \sin^2\delta\right] \epsilon$$

Además si consideramos que el giroscopio gira mucho más rápido que la Tierra, $|\dot{\psi}| \gg |\Omega|$

$$C_1 = I_1(\dot{\psi} - \Omega \sin\delta \cos\alpha) \approx I_1 \dot{\psi} \quad \text{(constante)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\epsilon} \approx \left[-\frac{I_1}{I_2} \dot{\psi} \Omega \sin\delta + \Omega^2 \sin^2\delta\right] \epsilon \ , \quad \text{donde } \dot{\psi} \gg \Omega \Rightarrow \dot{\psi}\Omega \gg \Omega^2$$

$$\Rightarrow \ddot{\epsilon} + \dot{\psi} \frac{I_1}{I_2} \Omega \sin\delta\, \epsilon = 0$$

Así que conseguimos un M.A.S, $\ddot{\epsilon} + \omega_0^2 \epsilon = 0$ que tiene como equilibrio (estable al ser un M.A.S.) $\epsilon = 0 \Rightarrow \alpha = \pi$ que es que nuestro giroscopio esté apuntando, con su eje de giro, hacia el Norte, así que podemos usarlo como brújula.

Si tomamos el equilibrio $\alpha = 0$ obtendremos un equilibrio inestable, entonces perturbando un poco el giroscopio, este tenderá al equilibrio estable $\alpha = \pi$ (apuntar al Norte)