Auxiliar 4

Dinámica I

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

Considere la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0),$$

la cual describe una partícula de masa m atada a un resorte ideal de constantes k y l_0 conocidas. Adicionalmente, considere las siguientes condiciones para $t = 0$:

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

donde A, v_0 son constantes conocidas. Con esta información, resuelva el sistema para encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, $x = x(t)$.

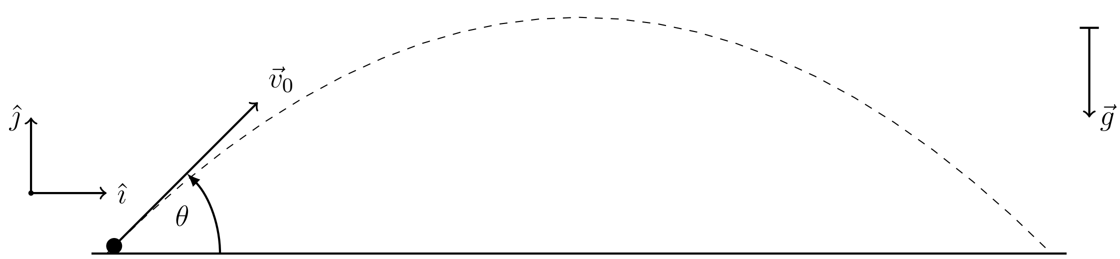
P2.-

Considere una partícula de masa m que es lanzada desde el suelo con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ formando un ángulo θ con respecto a la horizontal, como se muestra en la Figura. Ignore cualquier fuerza disipativa y considere la presencia de aceleración de gravedad $\vec{g}$.

a) Utilizando coordenadas cartesianas y la Segunda Ley de Newton, $m\vec{a} = \vec{F}$, encuentre las ecuaciones de movimiento del problema

b) Considerando condiciones iniciales, resuelva las ecuaciones de movimiento para obtener la posición en función del tiempo, $x = x(t)$ y $y = y(t)$

c) Utilizando el resultado anterior, encuentre la ecuación de la trayectoria $y = y(x)$



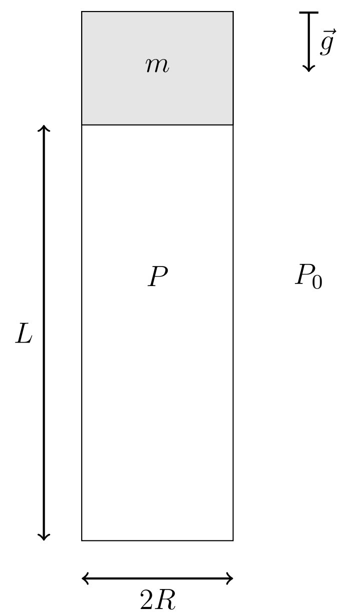
P3.-

Considere un tubo de radio interno R y largo L colocado en posición vertical, con su extremo inferior cerrado. En un cierto instante se suelta en el extremo superior del tubo (y desde el reposo) un émbolo de masa m, que se mueve hacia abajo por efecto de la gravedad, sin roce con las paredes del tubo, comprimiendo el aire encerrado por debajo de él. A medida que el aire de la cámara inferior se comprime, su presión P aumenta de modo tal que el producto entre la presión P y el volumen V de la cámara se mantiene constante ($PV = C_0$, con C_0 conocido). La presión atmosférica fuera del tubo es igual a P_0.

a) Escriba la ecuación de movimiento para el émbolo.

b) Determine a que altura el émbolo alcanza su máxima velocidad.

c) Determine una ecuación para encontrar la altura mínima que alcanza el émbolo sobre la base del tubo.



Formulario

Ecuación de movimiento

La segunda Ley de Newton nos indica una relación entre la aceleración de una partícula puntual y las fuerzas que actúan sobre ella. Es una ecuación diferencial de segundo orden dada por

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i,$$

donde m es la masa de la partícula, $\vec{a}$ su aceleración, y $\vec{F}_i$ la i-ésima fuerza actuando sobre ella (se suman todas las contribuciones).

Auxiliar 4

P1

a) Tenemos la EDO $\ddot{x} + \omega_0^2 (x - l_0) = 0$. Lo primero que hacemos es un cambio de variable

$$u(t) = x(t) - l_0 \Rightarrow \ddot{u}(t) = \ddot{x}(t),$$

de esta forma tratamos con

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (1)$$

que es una EDO homogénea de coeff. constantes, entonces proponemos una solución

$$u(t) = c\, e^{\gamma t}$$

que reemplazando en (1) sería

$$c\gamma^2 e^{\gamma t} + \omega_0^2 c\, e^{\gamma t} = 0 \quad / \cdot (c\, e^{\gamma t})^{-1}$$

$$\Rightarrow -\gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\therefore \gamma = \pm i\omega_0$$

Así que tenemos 2 sol. l.i. (que tiene todo el sentido), así que sumándolas

$$u(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} + l_0$$

Sin embargo, nos molesta que tengamos $e^{\pm i\omega_0 t} \in \mathbb{C}$, así que reescribamos la solución usando

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow x(t) = (c_1 + c_2)\cos(\omega_0 t) + (ic_1 - ic_2)\sin(\omega_0 t) + l_0$$

$$= \tilde{c}_1 \cos(\omega_0 t) + \tilde{c}_2 \sin(\omega_0 t) + l_0 \quad (2)$$

Ahora sí, impongamos C.I., que son: $x(0) = A$ y $\dot{x}(0) = v_0$. Una sería

$$(2) \Rightarrow x(0) = \tilde{c}_1 + l_0 \overset{!}{=} A \Rightarrow \tilde{c}_1 = A - l_0$$

$$(2) \Rightarrow \dot{x}(0) = \omega_0 \tilde{c}_2 \overset{!}{=} v_0 \Rightarrow \tilde{c}_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$$

y la sol. final sería

$$\boxed{x(t) = (A - l_0)\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + l_0}$$

P2

a) Ocuparemos coord. cartesianas, donde la aceleración está dada por

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath}$$

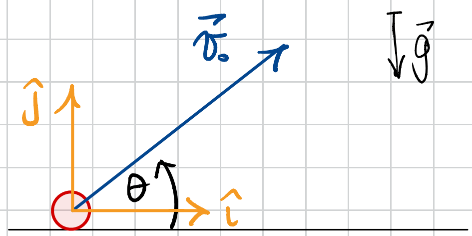


Fig. 1

y la única fuerza que está actuando durante el vuelo, es la de gravedad

$$\vec{F}_{peso} = m\vec{g} = -mg\hat{\jmath}$$

entonces, por 2da Ley de Newton, tenemos

$$m\vec{a} - \Sigma_i \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}\hat{\imath} + m\ddot{y}\hat{\jmath} = -mg\hat{\jmath} \quad (1)$$

con lo que conseguimos la ec. de movimiento vectorial. No obstante, utilizaremos (siempre) las ec. de movimiento escalares, que se consiguen multiplicando (1) por $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. De esta forma

$$\hat{\imath}) \quad m\ddot{x} = 0 \quad (2)$$

$$\hat{\jmath}) \quad m\ddot{y} = -mg \quad (3)$$

b) Debemos solucionar (2) y (3), y para eso necesitamos C.I.. Si definimos el origen del sist. donde comienza la partícula, entonces, en $t=0$,

$$x(0) = y(0) = 0.$$

Y por enunciado tenemos una velocidad inicial, que debemos descomponer en $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. Siguiendo Fig 1

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos\theta \qquad y \qquad \dot{y}(0) = v_0 \sin\theta.$$

Ahora sí podemos integrar. Empecemos con (2)

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \quad / \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0\cos\theta}^{\dot{x}} d\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = v_0 \cos\theta$$

e integrando una vez más, $\displaystyle\int_0^{x(t)} dx = v_0\cos\theta \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{x(t) = v_0\cos\theta \cdot t}$

Ahora, integramos (3) $\frac{d\dot{y}}{dt} = -g \quad / \int_0^t dt$

$$\Rightarrow \int_{v_0 \sin\theta}^{\dot{y}(t)} d\dot{y} = -g \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = v_0 \sin\theta - gt$$

e integrando denuevo: $\int_0^{y(t)} dy = v_0 \sin\theta \int_0^t dt - g\int_0^t t\,dt \Rightarrow \boxed{y(t) = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2}$

c) Sabemos que $x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t$, o, que es lo mismo,

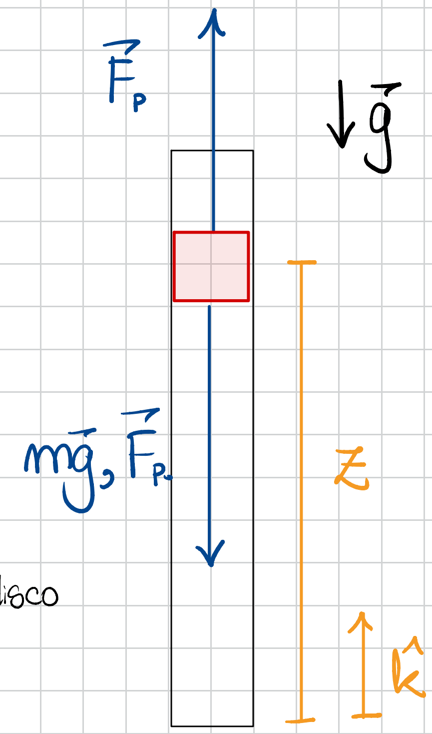
$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

Reemplazando esta expresión de t en la ec. $y(t)$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \tan(\theta) \cdot x}$$

que notamos que es la ec. de una parábola de la forma $y = -ax^2 + bx$.

P3



a) Como se mueve en línea recta utilizaremos cartesianas:

$$\vec{a} = \ddot{z}\hat{k}$$

Y en total hay 3 fuerzas actuando sobre m: la gravedad y las contribuciones de las presiones P_0 y P. La fuerza ejercida por una presión P es

$$F_P = A \cdot P$$

con A el área donde se ejerce dicha fuerza. En este caso tenemos un disco de radio R, entonces cada cara tiene

$$A = \pi R^2.$$

Adicionalmente, nos dicen que la presion P ejercida por el aire dentro del tubo cumple $PV = C_0$, con V el volumen del aire bajo el disco que sería $V = z \cdot \pi R^2$. Entonces, nuestras fuerzas son

- Gravedad: $m\vec{g} = -mg\hat{k}$
- Presion P_0: $\vec{F}_{P_0} = -\pi R^2 P_0 \hat{k}$
- Presión P: $\vec{F}_P = \pi R^2 P \hat{k} = C_0/z \cdot \hat{k}$

Juntando esta info. en la 2da Ley de Newton

$$m\vec{a} = \Sigma_i \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{z}\hat{k} = -mg\hat{k} - \pi R^2 P_0 \hat{k} + C_0/z \cdot \hat{k}$$

$$\Rightarrow \hat{k}) \quad \boxed{m\ddot{z} = C_0/z - mg - \pi R^2 P_0} \quad (1)$$

b) La velocidad máxima se da cuando su derivada es 0, o sea, $d\dot{z}/dt = \ddot{z} \stackrel{!}{=} 0$. Por lo que debemos usar (1) igualado a 0 y encontra la altura donde se da

$$\frac{C_0}{z^*} - mg - \pi R^2 P_0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z^* = \frac{C_0}{mg + \pi R^2 P_0}}$$

c) La altura mínima (o máx.) se da cuando su derivada es 0, o sea, $dz/dt = \dot{z} \stackrel{!}{=} 0$, por lo que debemos integrar (1). Usamos truco de mecánica y las C.I. $z(0) = L$ y $\dot{z}(0) = 0$ (soltado desde el reposo a una altura L), de esta forma

$$m\int_0^{\dot{z}(z)} \dot{z}\,d\dot{z} = C_0\int_L^z \frac{dz}{z} - (mg + \pi R^2 P_0)\int_L^z dz$$

$$\Rightarrow m\frac{\dot{z}^2}{2} = C_0 \ln\left(\frac{z}{L}\right) - (mg + \pi R^2 P_0)(z - L) \quad (2)$$

donde consideramos $\dot{z} \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \boxed{C_0 \ln\left(\frac{z_{min}}{L}\right) - (mg + \pi R^2 P_0)(z_{min} - L) \overset{!}{=} 0}$$