

Auxiliar 4

Cinemática₂

Profesor: Andrés Escala

Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi

Ayudante: Gerald Barnert

P1.-

Se tiene una plataforma de largo L , que rota con respecto a un eje en el punto O , en el extremo izquierdo de la base de largo $2L$, con velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega_0$ como se observa en la Figura.

Una partícula de masa m se encuentra sobre esta plataforma y amarrada a una cuerda de largo $2L$ sujeta al extremo P de la base, o sea, cuando la plataforma comienza a elevarse, $\theta = 0$, la cuerda está completamente estirada y la masa se encuentra en el punto O , pero con el movimiento de la plataforma comienza a deslizarse sobre ella.

Calcule la distancia de la masa m al origen O en función del ángulo θ , $r(\theta)$, y con esto calcule \dot{r} y \ddot{r} , también en función del ángulo.

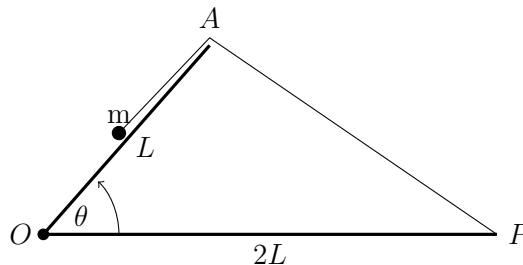


Figura 1: Pregunta 1

P2.-

Luego de un largo día de trabajo, un pescador se dispone a la peligrosa misión diaria de cruzar un río de ancho D , partiendo desde A e intentando llegar al punto O en la orilla opuesta. El agua del río tiene una velocidad constante \vec{v}_0 en todo su ancho, por lo que el pescador debe remar con una velocidad \vec{v}_p relativa al agua¹ y siempre apuntando a O como se observa en la Figura.

1. Usando coordenadas polares determine las ecuaciones de $\dot{\theta}$ y \dot{r} en función de r , θ , v_0 y v_p . Con estas ecuaciones exprese $\frac{dr}{d\theta}$ en función de los mismos parámetros.

¹ Ojo con la diferencia entre la velocidad relativa a la orilla y relativa al agua

2. Integre la expresión de 1. para encontrar la trayectoria en función de θ , D y las velocidades enunciadas, ¿qué condición debe cumplir v_p para que el pescador pueda llegar a O ?

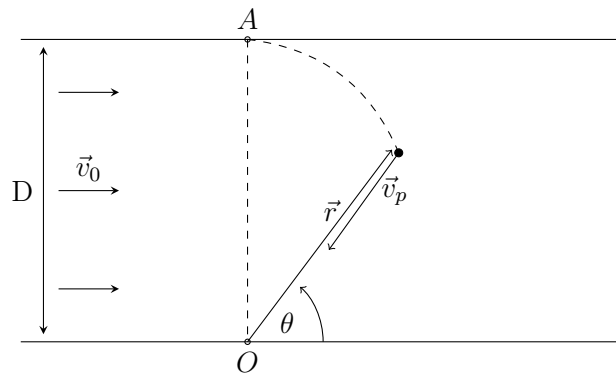


Figura 2: Pregunta 2

P2.-

Se tiene una plataforma de largo L , que rota con respecto a un eje en el punto O , en el extremo izquierdo de la base de largo $2L$, con velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega_0$ como se observa en la Figura.

Una partícula de masa m se encuentra sobre esta plataforma y amarrada a una cuerda de largo $2L$ sujeta al extremo P de la base, o sea, cuando la plataforma comienza a elevarse, $\theta = 0$, la cuerda está completamente estirada y la masa se encuentra en el punto O , pero con el movimiento de la plataforma comienza a deslizarse sobre ella.

Calcule la distancia de la masa m al origen O en función del tiempo y con esto calcule su posición, velocidad y aceleración en función del ángulo de la plataforma θ .

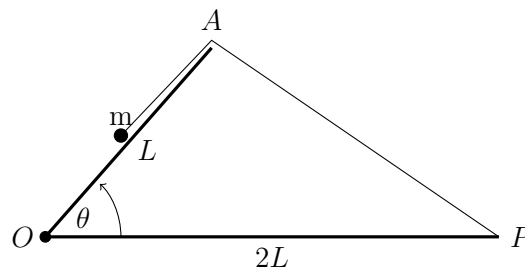
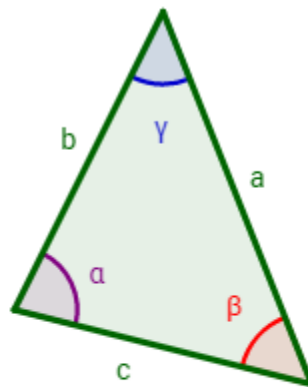


Figura 1

Respuesta

Usamos teorema del coseno.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Figura 2

Definiendo la distancia AP como d , la distancia de la masa al punto A como x y la distancia de

O a la masa como r , nos queda:

$$\begin{aligned}d^2 &= 4L^2 + L^2 - 2 \cdot 2L^2 \cos \theta \\d &= L\sqrt{5 - 4 \cos \theta},\end{aligned}$$

además, por geometría tenemos:

$$\begin{aligned}r &= L - x; \quad x + d = 2L \\&\Rightarrow r = d - L \\&\Rightarrow r(\theta) = L(\sqrt{5 - 4 \cos \theta} - 1).\end{aligned}$$

Ya con la posición solo basta con derivar una vez y dos veces para obtener la velocidad y aceleración.

$$\dot{r} = \frac{L \cdot 4 \sin \theta \cdot \dot{\theta}}{2\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} = \frac{2L \sin \theta \cdot \omega_0}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}}, \quad (10)$$

notamos que podemos simplificar el cálculo usando regla de la cadena:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \cdot \omega_0,$$

calculamos la derivada con la regla de la división:

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{r}}{d\theta} &= \frac{2L\omega_0 \cos \theta \cdot \sqrt{5 - 4 \cos \theta} - \frac{4L \sin^2 \theta \cdot \omega_0}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}}}{5 - 4 \cos \theta} \\ \frac{d\dot{r}}{d\theta} &= 2L\omega_0 \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} - \frac{2 \sin^2 \theta}{(5 - 4 \cos \theta)^{3/2}} \right) \\ \frac{d\dot{r}}{d\theta} &= \frac{2L\omega_0}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \left(\cos \theta - \frac{2 \sin^2 \theta}{5 - 4 \cos \theta} \right) \\ \Rightarrow \ddot{r}(\theta) &= \frac{2L\omega_0^2}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \left(\cos \theta - \frac{2 \sin^2 \theta}{5 - 4 \cos \theta} \right)\end{aligned}$$

P2

Tenemos que la velocidad del pescador con respecto a la orilla del río (el sistema en el que está definido el sist. de coordenadas) es la velocidad del río más la del pescador c/r al río (suma de velocidades de Galileo)

$$\vec{V} = \vec{V}_p + \vec{V}_r$$

donde geométricamente tenemos que $\vec{V}_r = v_r \cos\theta \hat{r} - v_r \sin\theta \hat{\theta}$ y como el pescador siempre rema hacia el origen del sist. de coord., $\vec{V}_p = -v_p \hat{r}$

$$\Rightarrow \vec{V} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} = -v_p \hat{r} + v_r \cos\theta \hat{r} - v_r \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\hat{r}) \dot{r} = -v_p + v_r \cos\theta = \frac{dr}{dt} \quad (1)$$

$$\hat{\theta}) r \dot{\theta} = -v_r \sin\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

$$\text{Ahora, haciendo (1)/(2)} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{-v_p + v_r \cos\theta}{-v_r \sin\theta} = \frac{dr}{d\theta} = \frac{r(v_p - v_r \cos\theta)}{v_r \sin\theta} \quad (3)$$

$$2. \text{ Integremos (3)} \quad \frac{dr}{r} = \frac{(v_p - v_r \cos\theta) d\theta}{v_r \sin\theta} \quad //$$

$$\Rightarrow \int \frac{dr}{r} = \frac{v_p}{v_r} \int \frac{d\theta}{\sin\theta} - \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta}$$

$$\Leftrightarrow \ln(r) \Big|_0^r = -\frac{v_p}{2v_r} \ln\left(\frac{\cos\theta+1}{1-\cos\theta}\right) - \ln(\sin\theta) \Big|_{\pi/2}^{\theta}$$

$$\ln\left(\frac{r}{D}\right) = \ln\left(\left(\frac{\cos\theta+1}{1-\cos\theta}\right)^{-\frac{v_p}{2v_r}}\right) - \ln(\sin\theta)$$

$$\Rightarrow r(\theta) = D \left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta+1}\right)^{\frac{v_p}{2v_r}} \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= D \left(\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}\right)^{\frac{v_p}{2v_r}} \frac{1}{\sin\theta} = D \frac{\tan(\theta/2)^{\frac{v_p}{v_r}}}{\sin\theta}$$

donde para que $r=0$ para algún θ , por ejemplo $\theta \ll 1$, necesitamos que $v_p/v_r \gg 1 \Leftrightarrow v_p \gg v_r$.