Auxiliar 3

Sólido rígido I

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- El terror de la generación 2021-2

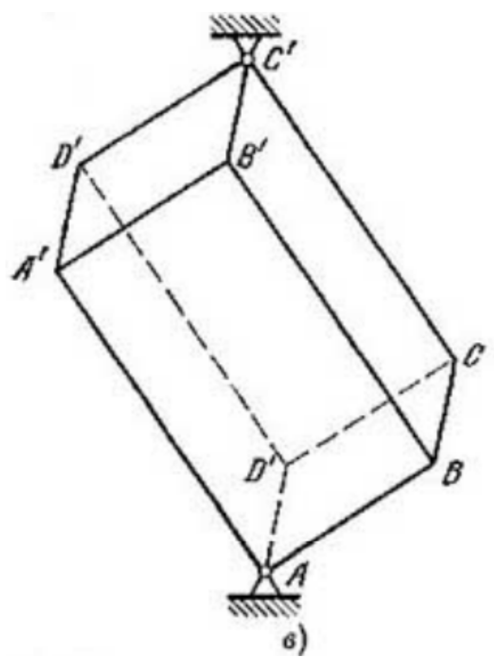
En los dos vértices opuestos A y C' de un paralelepípedo rectangular homogéneo se encuentran articulaciones que permiten al paralelepípedo girar libremente con velocidad angular alrededor de la diagonal AC' **que pasa por el centro de masa del sólido**.

Las aristas del paralelepípedo son:

$$\overline{AB} = a\,, \quad \overline{BC} = b\,, \quad \overline{AA'} = c$$

a) Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema

b) Encuentre el valor de las fuerzas de pivote que se ejercen en los extremos del paralelepípedo



Hint: considere que el sólido solo gira en la dirección de $\hat{k}_I$ (la vertical de toda la vida y que está contenida en la recta $\overline{AC'}$), por lo que no tiene movimiento de rotación ni nutación, **solo tiene precesión** (en ángulos de Euler: $\dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$)

Formulario

Sólido rígido

El Lagrangiano de un sólido rígido puede ser escrito como

$$L = K - U = \frac{1}{2}M|\dot{\vec{R}}_{\mathrm{CM}}|^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{\mathrm{CM}}\vec{\Omega} - U = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{\mathcal{O}'}\vec{\Omega} - U,$$

donde $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del sólido, $I_{\mathcal{O}'}$ la matriz de inercia calculada c/r a un punto $\mathcal{O}'$ **fijo** tanto en el sólido como en el espacio y U la energía potencial.

Podemos calcular las fuerzas de restricción igual que para el caso de partículas discretas

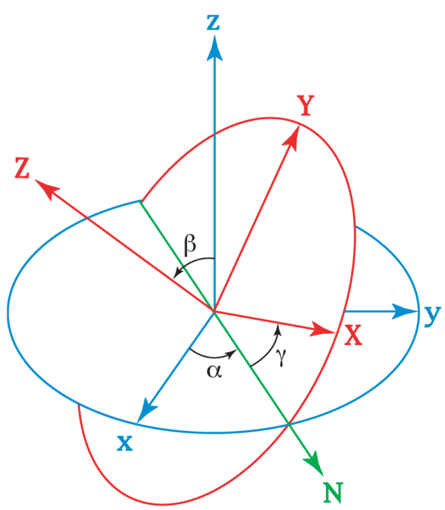
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i},$$

donde λ_j son las fuerzas de restricción y f_j las restricciones geométricas.

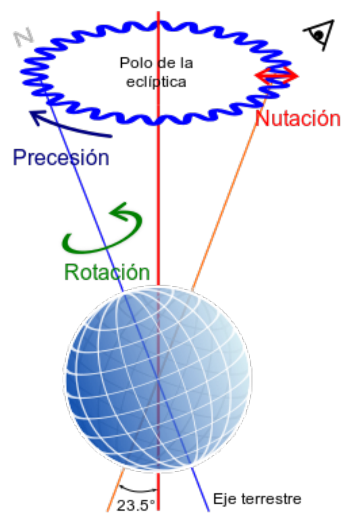
Ángulos de Euler

La velocidad angular de un sólido rígido en un sistema de coordenadas **fijo al cuerpo** puede ser escrita en función de los ángulos de Euler θ, ϕ, ψ como:

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi\\ -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi\\ \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\end{pmatrix}.$$



(a) Ángulos de Euler donde $\alpha = \phi$, $\gamma = \psi$, $\beta = \theta$

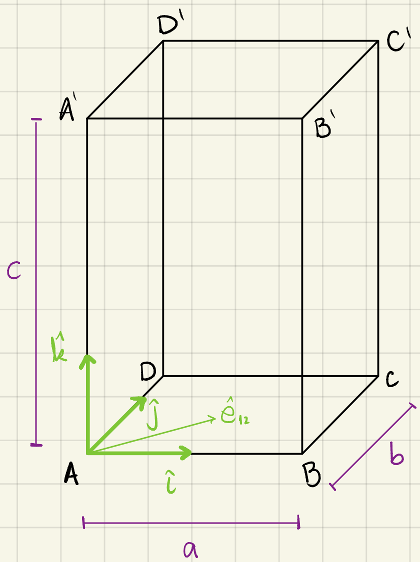


(b) Movimientos de rotación, precesión y nutación de la Tierra

Auxiliar 3

P1

a) Calculemos el tensor de inercia c/r al punto A del paralelepípedo usando la fórmula



$$I_{ij} = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)\, dm$$

donde $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ y como el sólido es homogéneo de densidad $\rho(\vec{r}) = \rho \Rightarrow dm = \rho dV = \rho dx dy dz$

▷ $I_{11} = \int_0^c\int_0^b\int_0^a (y^2+z^2)\rho dx dy dz = \rho ac \frac{b^3}{3} + \rho ab\frac{c^3}{3}$

▷ $I_{22} = \int_0^c\int_0^b\int_0^a (x^2+z^2)\rho dx dy dz = \rho bc \frac{a^3}{3} + \rho ab\frac{c^3}{3}$

▷ $I_{33} = \int_0^c\int_0^b\int_0^a (x^2+y^2)\rho dx dy dz = \rho bc \frac{a^3}{3} + \rho ac\frac{b^3}{3}$

Como I es una matriz simétrica, solo calcularemos el triángulo superior de esta

▷ $I_{12} = -\int_0^c\int_0^b\int_0^a xy\, \rho dx dy dz = -\rho c \frac{a^2}{2}\frac{b^2}{2}$

▷ $I_{13} = -\int_0^c\int_0^b\int_0^a xz = -\rho b \frac{a^2}{2}\frac{c^2}{2}$

▷ $I_{23} = -\int_0^c\int_0^b\int_0^a yz\, \rho dx dy dz = -\rho a \frac{b^2}{2}\frac{c^2}{2}$

$$\Rightarrow [I_A] = \rho\, abc \begin{pmatrix} (b^2+c^2)/3 & -ab/4 & -ac/4 \\ -ab/4 & (a^2+c^2)/3 & -bc/4 \\ -ac/4 & -bc/4 & (a^2+b^2)/3 \end{pmatrix}$$

Hacemos esto porque queremos encontrar el Lagrangiano del problema, que en general está dado por

$$L = K - U = \frac{1}{2} M |\dot{\vec{R}}_{CM}| + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{CM} \vec{\Omega} - U = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_O \vec{\Omega} - U$$

donde I_{CM} es el tensor de inercia calculado c/r al CM y I_O el " c/r a un punto fijo del sólido en el espacio. Nosotros calculamos I_A con A fijo en el espacio así que usamos la segunda igualdad

Entonces necesitamos encontrar la expresión de $\vec{\Omega}$ en el sist. fijo al sólido ($\{\hat{\imath}, \hat{j}, \hat{k}\}$), pero tenemos que esta velocidad en un sist. inercial fijo en A ($\{\hat{\imath}_I, \hat{j}_I, \hat{k}_I\}$) es $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\hat{k}_I$ así que debemos descomponerlo

sist. inercial que no rota

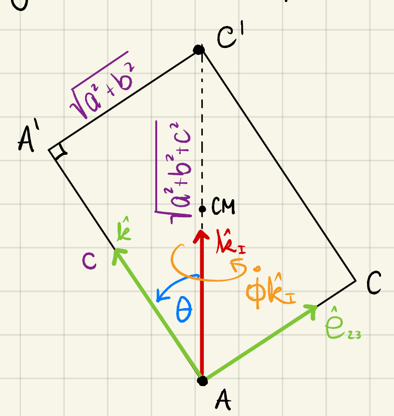


Fig 2. Corte plano ACC'A'

Viendo la Fig 2. tenemos la siguiente descomposición

$$\hat{k}_I = \cos\theta\,\hat{k} + \sin\theta\,\hat{e}_{12} \quad , \text{ con } \sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}/\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad y \quad \cos\theta = c/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

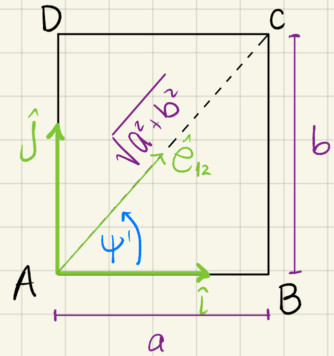


Fig 3. Corte plano ABCD

donde $\hat{e}_{12}$ es un vector unitario contenido en el plano $\hat{\imath}-\hat{\jmath}$ que se descompone como

$$\hat{e}_{12} = \cos\psi'\,\hat{\imath} + \sin\psi'\,\hat{\jmath} \quad , \text{ con } \sin\psi' = b/\sqrt{a^2+b^2} \quad y \quad \cos\psi' = a/\sqrt{a^2+b^2}$$

finalmente podemos escribir $\hat{k}_I$ como

$$\hat{k}_I = \sin\theta\cos\psi'\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\psi'\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,\frac{a}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}\,\hat{\imath} + \frac{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,\frac{b}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}\,\hat{\jmath} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(a\,\hat{\imath} + b\,\hat{\jmath} + c\,\hat{k}\right)$$

así que la vel ang en el sist. $\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\}$ sería

en el sist. pegado al sólido

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi}\,\hat{k}_I = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(a\,\hat{\imath} + b\,\hat{\jmath} + c\,\hat{k}\right) = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

entonces nuestra energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_A \vec{\Omega} = \frac{\dot{\phi}^2}{2}\,\frac{\rho abc}{(a^2+b^2+c^2)}\,(a, b, c)\begin{pmatrix} (b^2+c^2)/3 & -ab/4 & -ac/4 \\ -ab/4 & (a^2+c^2)/3 & -bc/4 \\ -ac/4 & -bc/4 & (a^2+b^2)/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\dot{\phi}^2}{2}\,\frac{\rho abc}{(a^2+b^2+c^2)}\,\frac{1}{6}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right)$$

$$\equiv \frac{\dot{\phi}^2}{2}\cdot\alpha$$

La única contribución a la energía potencial es la potencial gravitatoria (la fuerza de las articulaciones/pivotes son fuerzas de restricción que agregaremos después), pero como el CM siempre está a la misma altura del piso, la energía potencial es constante

$$U = Mg\,z_{CM} = Mg\,\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{2} = U_0 \quad , \quad \text{donde } M = \int \rho\, dV = \rho\int dV = \rho abc$$

por lo que el Lagrangiano nos quedaría como

$$L = K - U = \frac{\dot{\phi}^2}{2}\alpha - U_0$$

y la ecuación de movimiento la con Euler-Lagrange

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_\phi \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot\phi} = \dot\phi \alpha = \text{cte}$ dada por C.I.

con lo que conseguimos describir el movimiento del paralelepipedo que es: rotar c/r a $\hat{k}_I$ con vel. ang. cte

b) Ahora calculemos las fuerzas de restricción usando el método de multiplicadores de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$$

donde f_j son las restricciones geométricas del problema

Un problema general de sólido rígido tiene 6 grados de libertad: 3 correspondientes a la traslación y 3 correspondientes a la rotación. En nuestro problema encontramos que el cuerpo no se traslada y gira, pero solo c/r a un eje (la velocidad angular $\dot\phi$).

Viendo la Fig 4. debemos imponer 2 cosas:

1) El CM debe encontrarse en $\vec{R}_{CM} \overset{!}{=} \sqrt{a^2+b^2+c^2}/2 \cdot \hat{k}_I$ fijo

2) El sólido solo puede tener velocidad angular $\dot\phi$

para 1) tenemos que el CM de forma general se escribe como

$$\vec{R}_{CM} = x_{CM}\hat{\imath}_I + y_{CM}\hat{\jmath}_I + z_{CM}\hat{k}_I$$

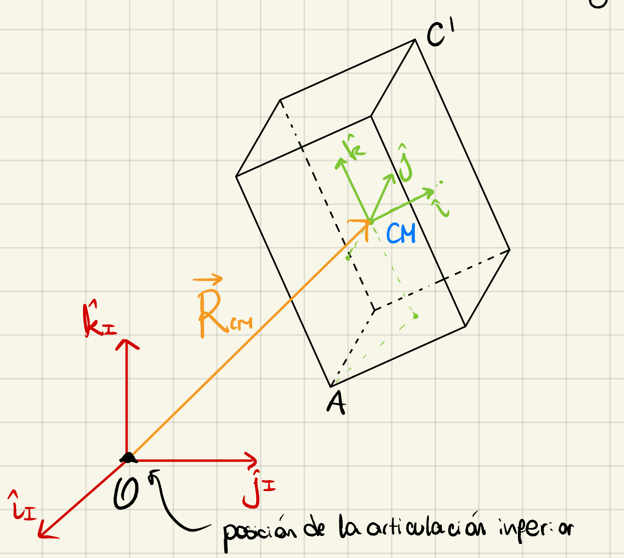


Fig 4. Nuestro sólido libre en el espacio

entonces la restricción nos obliga a imponer

$$\underbrace{x_{CM} \overset{!}{=} 0}_{f_1}, \quad \underbrace{y_{CM} \overset{!}{=} 0}_{f_2}, \quad \overbrace{z_{CM} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}}^{f_3}$$

mientras que si la rotación del cuerpo la definimos con ángulos de Euler ϕ, θ, ψ, para cumplir 2) (que implica también que AC' se encuentre alineado en $\hat{k}_I$) debemos imponer que

$$\underbrace{\theta \overset{!}{=} \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\right)}_{f_4} \quad \wedge \quad \underbrace{\psi \overset{!}{=} \arctan\left(\frac{a}{b}\right)}_{f_5}$$

con lo que obtenemos 5 restricciones, por lo que concuerda con tener $6-5=1$ grado de libertad

El Lagrangiano para este paralelepípedo libre en el espacio (todavía sin aplicar las restricciones) puede ser escrito como

$$L = K - U = \frac{1}{2}M|\dot{\vec{R}}_{CM}|^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{CM}\vec{\Omega} - Mg z_{CM}$$

las distintas partes de este serían

- $\dot{\vec{R}}_{CM} = \dot{x}_{CM}\hat{\imath}_I + \dot{y}_{CM}\hat{\jmath}_I + \dot{z}_{CM}\hat{k}_I \Rightarrow |\dot{\vec{R}}_{CM}|^2 = \dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2 + \dot{z}_{CM}^2$
- $\vec{\Omega} = (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)\hat{\imath} + (-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)\hat{\jmath} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{k}$
- $I_{11}^{CM} = \frac{M}{12}(b^2+c^2)$, $I_{22}^{CM} = \frac{M}{12}(a^2+c^2)$, $I_{33}^{CM} = \frac{M}{12}(a^2+b^2)$ (de Wikipedia, calcúlelo usted)

* $\vec{\Omega}$ está descrito en su expresión general en función de ángulos de Euler ϕ, θ, ψ. Noten que obtenemos la misma expresión de $\vec{\Omega}$ que antes si tomamos $\dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$, $\psi = \pi/2 - \psi'$ y las respectivas expresiones trigonométricas

Así que el Lagrangiano sería

$$L = K - U = \frac{1}{2}M(\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2 + \dot{z}_{CM}^2) + \frac{1}{2}I_{11}^{CM}(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)^2 + \frac{1}{2}I_{22}^{CM}(-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)^2$$

$$+ \frac{1}{2}I_{33}^{CM}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - Mg z_{CM}$$

Ahora debemos calcular las ecs de E-L para los 6 grados de libertad

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{CM}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_{CM}} = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_{CM}}(x_{CM} - 0) \Leftrightarrow \boxed{M\ddot{x}_{CM} = \lambda_1}$
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{CM}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_{CM}} = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y_{CM}}(y_{CM} - 0) \Leftrightarrow \boxed{M\ddot{y}_{CM} = \lambda_2}$
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_{CM}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_{CM}} = \lambda_3 \frac{\partial}{\partial z_{CM}}\left(z_{CM} - \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{M\ddot{z}_{CM} + Mg = \lambda_3}$

- $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = I_{11}^{CM}\frac{d}{dt}\left[(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)\sin\theta\sin\psi\right]$

$$\Rightarrow \boxed{I_{11}^{CM}\ddot{\phi}\sin^2\theta\sin^2\psi + g_1(\dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{\psi}) = 0} \quad (*)$$

- $\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_{11}^{CM}(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)\dot{\phi}\cos\theta\sin\psi + I_{22}^{CM}(-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)\dot{\phi}\cos\theta\cos\psi$

$$- I_{33}^{CM}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cdot\dot{\phi}\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left[I_{11}^{CM}(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)\cos\psi - I_{22}^{CM}(-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)\sin\psi\right]$$

$$= \ddot{\phi}\sin\theta\cos\psi\sin\psi(I_{11}^{CM} - I_{22}^{CM}) + g_2(\dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{\psi})$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\phi}\sin\theta\cos\psi\sin\psi(I_{11}^{CM} - I_{22}^{CM}) - \dot{\phi}^2(I_{11}^{CM}\cos\theta\sin\theta\sin^2\psi + I_{22}^{CM}\cos\theta\sin\theta\cos^2\psi - I_{33}^{CM}\cos\theta\sin\theta) + g_3(\dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{\psi}) = \lambda_4}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial \psi} = I_{11}^{CM}(\dot\theta\cos\psi + \dot\phi\sin\theta\sin\psi)\,\dot\phi\sin\theta\cos\psi - I_{22}^{CM}(-\dot\theta\sin\psi + \dot\phi\sin\theta\cos\psi)\,\dot\phi\sin\theta\sin\psi$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) = I_{33}^{CM}\frac{d}{dt}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = I_{33}^{CM}\left(g_6(\dot\psi,\ddot\psi,\dot\theta) + \ddot\phi\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{33}^{CM}\ddot\phi\cos\theta - \dot\phi^2\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi\,(I_{11}^{CM} - I_{22}^{CM}) + g_6(\dot\psi,\ddot\psi,\dot\theta) = \lambda_5}$$

Imponiendo que se cumplan las restricciones f_j con $j\in\{1,\dots,5\}$ se van todos los g_k por tener derivadas de θ y ψ y que damos con que

- $\lambda_1 = 0$ - $\lambda_2 = 0$ - $\lambda_3 = Mg$

- $\lambda_4 = \ddot\phi\sin\theta\cos\psi\sin\psi\,(I_{11}^{CM} - I_{22}^{CM}) - \dot\phi^2\left(I_{11}^{CM}\cos\theta\sin\theta\sin^2\psi + I_{22}^{CM}\cos\theta\sin\theta\cos^2\psi - I_{33}^{CM}\cos\theta\sin\theta\right)$
- $\lambda_5 = I_{33}^{CM}\ddot\phi\cos\theta - \dot\phi^2\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi\,(I_{11}^{CM} - I_{22}^{CM})$

Ahora, (*) nos dice que $\dot\phi = cte \Rightarrow \ddot\phi = 0$, definiendo $\omega \equiv \dot\phi$ (dado por C.I. tenemos:

- $\lambda_4 = -\omega^2\left(I_{11}^{CM}\cos\theta\sin\theta\sin^2\psi + I_{22}^{CM}\cos\theta\sin\theta\cos^2\psi - I_{33}^{CM}\cos\theta\sin\theta\right)$
- $\lambda_5 = -\omega^2\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi\,(I_{11}^{CM} - I_{22}^{CM})$

donde conocemos las expresiones trigonométricas de la parte a)

Notamos que en ningún momento dijimos si estas fuerzas las estaban aplicando el pivote superior o el inferior, esto es porque el paralelepípedo podría estar soportado por solo una articulación y el movimiento sería el mismo