Auxiliar 3

Coordenadas intrínsecas y dinámica

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi

P1.- Control 1 2023-1

Considere un tubo rígido con forma de una semi-elipse descrita por la ecuación

$$\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1\,,$$

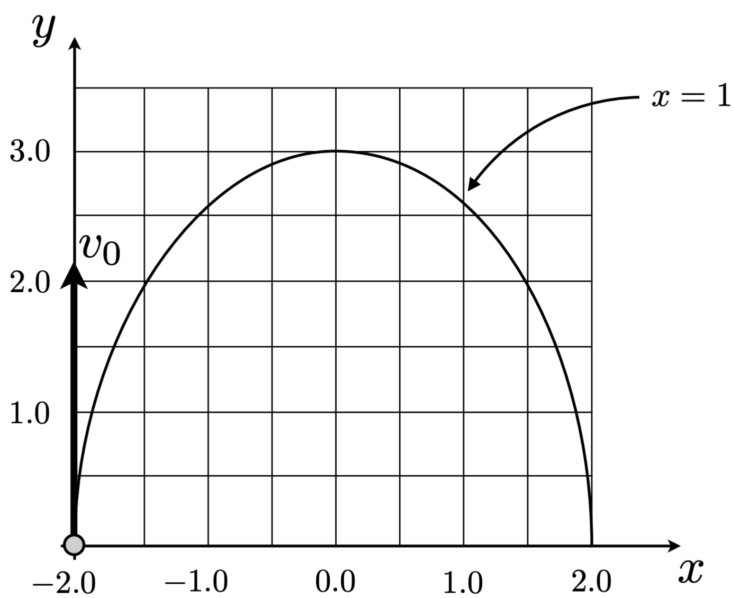
ver Figura. El tubo se encuentra fijo en un ambiente sin gravedad. Un anillo de masa m puede deslizar sin roce a lo largo del tubo. En el instante inicial el anillo se impulsa con rapidez v_0 desde uno de sus extremos ($x = -2$; $y = 0$). Para el instante cuando el anillo está pasando por el punto donde $x = 1$ determine:

a) Componente del vector velocidad a lo largo del eje x

b) Componente del vector velocidad a lo largo del eje y

c) Magnitud de la fuerza que el tubo ejerce sobre el anillo

d) Componente de la aceleración a lo largo del eje x



P2.- Control 1 2022-2

Una bolita de masa m se desliza sin roce por el interior de una copa. La superficie de la copa está descrita por la función $z = f(\rho)$ donde z y ρ son coordenadas cilíndricas y el eje vertical $\hat{k}$ es el eje de revolución de la copa (ver Figura). Se observa que la bolita se mueve describiendo **un círculo** y manteniendo **constante su altura**.

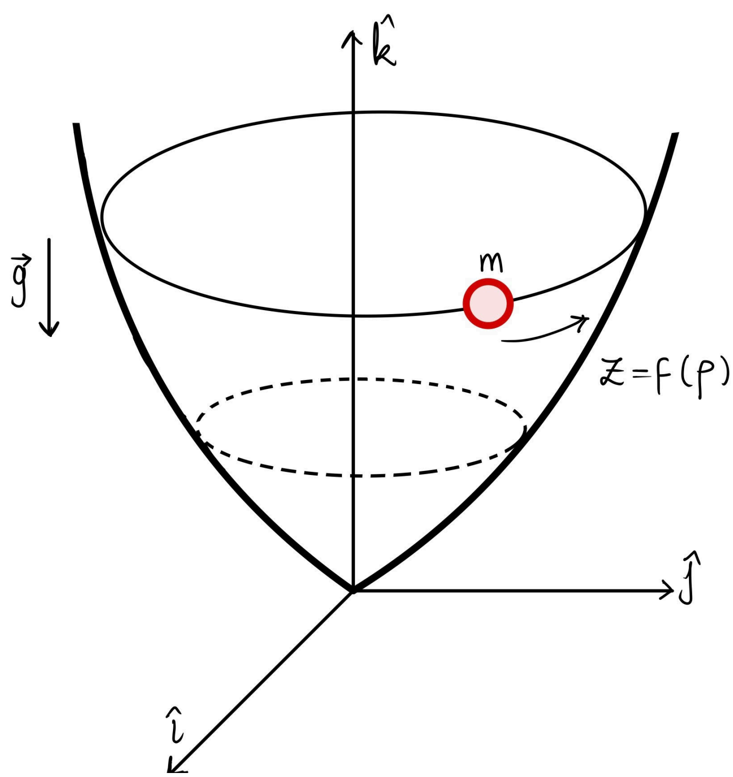
a) Dibuje el DCL de la bolita

b) Escriba las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas

c) Determine la velocidad angular ω de la bolita en términos de $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\rho}$, el radio del círculo y otras constantes del problema

d) Considere los casos de una copa de martini ($z_m = \rho$) y en una de vino ($z_v = H\left(\frac{\rho}{R}\right)^2$). Determine la velocidad angular ω en cada caso

e) Si la altura de la bolita en ambas copas es la misma, señale en cuál de ellas la bolita tiene una mayor velocidad angular o si esto depende de alguna condición de los parámetros



Formulario

Coordenadas intrínsecas

La velocidad y aceleración en coordenadas intrínsecas están dadas por:

$$\vec{v} = v\hat{t}$$
$$\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n}\,.$$

En 2D, un plano (x, y), el vector tangente puede ser escrito en coordenadas cartesianas como

$$\hat{t} = \frac{\mathrm{d}x\,\hat{x} + \mathrm{d}y\,\hat{y}}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}\,,$$

el vector normal como

$$\hat{n} = \frac{\mathrm{d}y\,\hat{x} - \mathrm{d}x\,\hat{y}}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}\,,$$

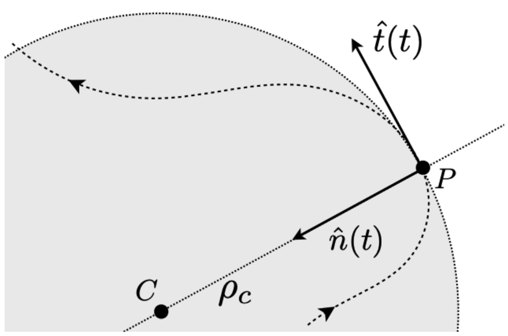
y el radio de curvatura como

$$\rho_c = \frac{1}{|y''|}\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}, \qquad \text{con} \qquad y' \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{y} \quad y'' \equiv \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

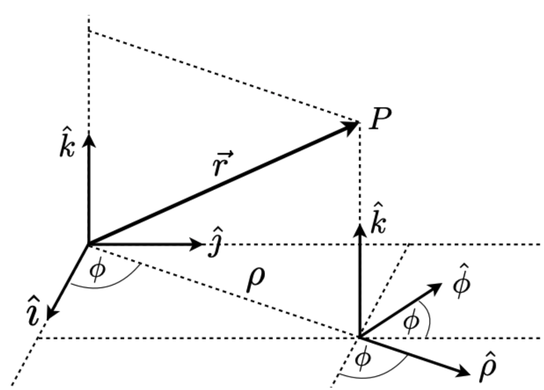
Coordenadas cilíndricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
&= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}
\end{aligned}$$



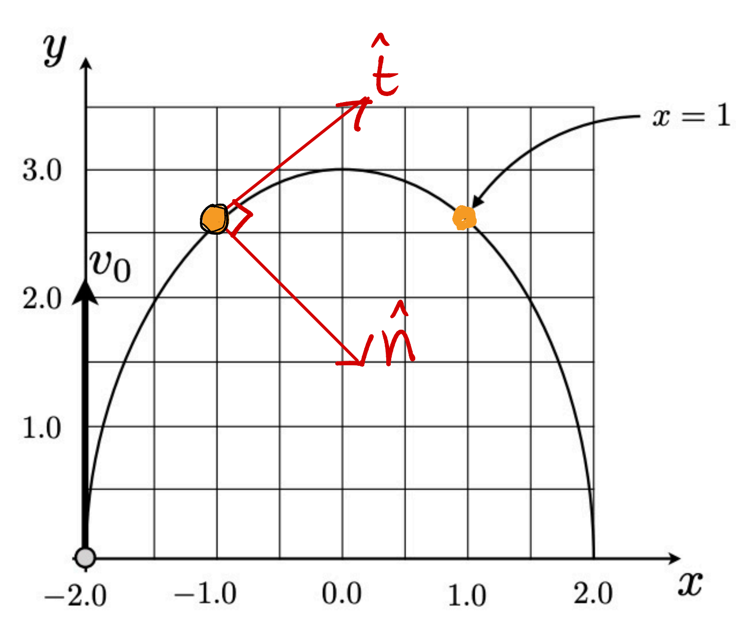
(a) Coord. intrínsecas



(b) Coord. cilíndricas

Auxiliar 3

P1



a) Debido a que nos dan la trayectoria como $y = y(x)$ usaremos intrínsecas

Sabemos que la velocidad es

$$\vec{v} = v\hat{t} \quad (1)$$

y la aceleración

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n} \quad (2)$$

Solo tenemos la fuerza normal que ejerce el tubo sobre la partícula y que, por def., es perpendicular a la trayectoria, o sea, $\vec{N} = N\hat{n}$. Por 2da Ley de Newton

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow m\left(\dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n}\right) = N\hat{n}$$

separando las componentes

▷ $m\dot{v} = 0 \quad (3)$ ▷ $m\frac{v^2}{\rho_c} = N \quad (4)$

y por (3) sabemos que $v = cte.$, en particular igual a $t = 0$

$$\therefore \; v = v_0 \quad \text{constante}$$

Así que la velocidad sería $\vec{v} = v_0\hat{t}$, por lo que debemos encontrar la expresión de $\hat{t}$ en función de x. Sabemos que

$$\hat{t} = \frac{dx\hat{x} + dy\hat{y}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \cdot \frac{1/dx}{1/dx} = \frac{\hat{x} + y'\hat{y}}{\sqrt{1 + y'^2}} \qquad \text{donde } y' = \frac{dy}{dx}$$

Encontremos $y = y(x)$ con la forma del tubo

tomamos el signo +

$$\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow y(x) = +3\sqrt{1 - x^2/4}$$

y derivamos una vez, $\qquad \frac{dy}{dx} = y' = -\frac{3}{2}\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

que evaluado en el punto de interés, $x=1$,

$$y'(x=1) = -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

así que el vector unitario tangente en $x=1$ sería

$$\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{1+3/4}}\,\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1+3/4}}\,\hat{y} = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\hat{x} - \sqrt{\frac{3}{7}}\,\hat{y}$$

y recordando que la velocidad es $\vec{v} = v_0\hat{t}$, entonces multiplicamos y separamos

$$\boxed{v_x = \frac{2v_0}{\sqrt{7}}} \quad y \quad \boxed{v_y = -\sqrt{\frac{3}{7}}\,v_0}$$

c) Por (4) podemos calcular la normal. Ya sabemos que $v = v_0$, así que falta calcular el radio de curvatura ρ_c que tiene como expresión

$$\rho_c = \frac{1}{|y''|}\left[1 + y'^2\right]^{3/2}$$

Calculemos la segunda derivada de $y(x)$:

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}\left[-\frac{3}{2}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right] = -\frac{3}{2}\left[\sqrt{4-x^2} - \frac{x}{2}\cdot\frac{(-2x)}{(4-x^2)^{1/2}}\right]\frac{1}{4-x^2}$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{(4-x^2)^{1/2}} + \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\right]$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{4-x^2+x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\right] = -\frac{6}{(4-x^2)^{3/2}}$$

que evaluada en $x=1$

$$y''(x=1) = -\frac{6}{(4-1)^{3/2}} = -\frac{6}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

así que ρ_c evaluado en $x=1$ es

$$\rho_c(x=1) = \frac{3}{2\sqrt{3}}\left[1 + \frac{3}{4}\right]^{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{4}\right)^{3/2}$$

y ocupando (4)

$$N = m\frac{v_0^2}{\rho_c} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{4}{7}\right)^{3/2} m v_0^2 = \boxed{\frac{48}{21^{3/2}}\,m v_0^2}$$

d) Para encontrar la aceleración usamos que

$$\hat{n} = \frac{y'\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{1+y'^2}}$$

y ocupando (2)

$$\vec{a} = \cancel{\dot{v}}^{=0}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n} = \frac{v_0^2}{\rho_c}\left[\frac{y'\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{1+y'^2}}\right]$$

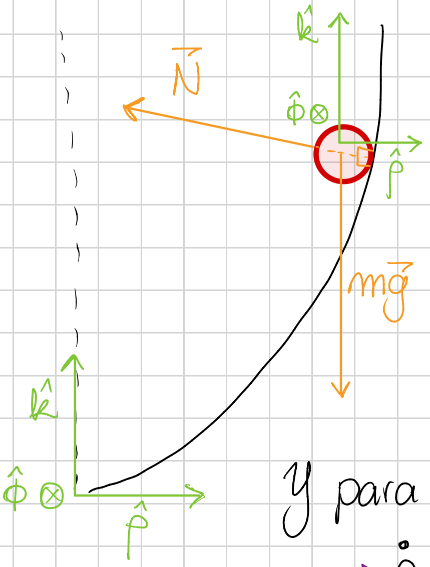
así que la componente en $\hat{x}$ es

$$a_x = \frac{v_0^2}{\rho_c}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

donde basta con reemplazar con $x=1$ en las expresiones encontradas

$$\boxed{a_x(x=1) = -\frac{16}{49}v_0^2}$$

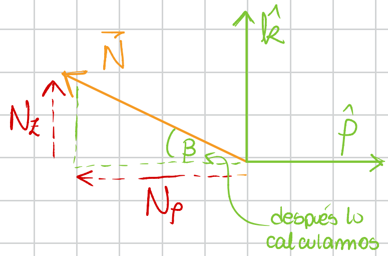
P2



Notamos que solo tenemos dos fuerzas actuando sobre la partícula: la normal **perpendicular** a la superficie y el peso en $-\hat{k}$

Por enunciado, debemos elegir un sist. de coord. cilíndricas con origen en la base de la copa

Toca descomponer las fuerzas



- Peso: $\vec{F}_p = -mg\hat{k}$
- Normal: $\vec{N} = N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k}$

Y para expresar la aceleración (en cilíndricas) usamos que

$$\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0 \qquad \dot{z} = \ddot{z} = 0$$

así que tendríamos

el radio de una órbita en específico

$$\vec{a} = (\cancel{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\,\hat{\phi} + \cancel{\ddot{z}}\hat{k} = -\rho\,\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi}$$

donde ocupamos la expresión con derivada en $\hat{\phi}$ porque no hay fuerzas en $\hat{\phi}$ y por lo tanto hay conservación del momentum angular

Reemplazando en segunda Ley de Newton, $m\vec{a} = \sum\vec{F}$

$$-m\rho\,\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} = -mg\hat{k} + N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k}$$

con lo que conseguimos la **ec. de movimiento vectorial**. Obtengamos las ecs. escalares

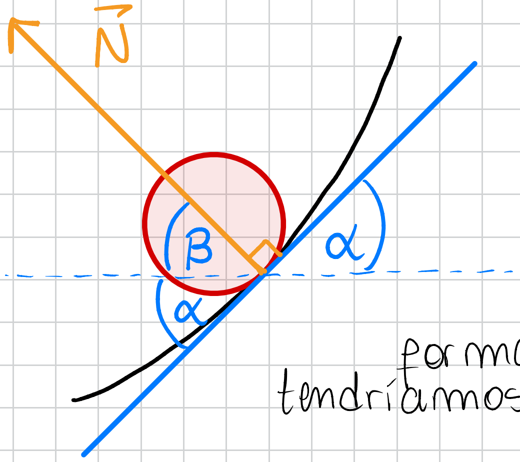
$$\hat{\rho})\quad -m\rho\,\dot{\phi}^2 = N_\rho$$

$$\hat{\phi})\quad \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) = 0$$

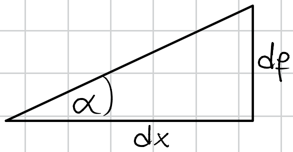
$$\hat{k})\quad 0 = -mg + N_z \Rightarrow N_z = mg$$

Donde, recordar que ρ es el radio de la órbita que seguiría la partícula.
Ahora, no conocemos la expresión de N_ρ como para despejar $\dot{\phi}$ de $\hat{\rho})$, por lo que debemos buscar la expresión de esta normal.

Notamos que en $\hat{\rho})$ tenemos la normal en $\hat{\rho}$, pero como sucede siempre, no sabemos su expresión a priori (no hay una fórmula general para la normal, depende del problema), pero geométricamente podemos ver que N_ρ y N_z vienen de la misma normal, por lo que están relacionadas.



Por cálculo diferencial tenemos que la pendiente en un punto x de una curva f(x) es



$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \tan(\alpha)$$

y esta pendiente es igual a la tangente del ángulo formado con la horizontal. Así que en este problema tendríamos que

$$\tan\alpha = \frac{df(\rho)}{d\rho} = \frac{dz}{d\rho}$$

y tenemos que $\tan\alpha = \tan(\pi/2 - \beta) = \dfrac{1}{\tan\beta}$, por lo que las normales serían

$$\bar{N} = N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k} \longrightarrow N_\rho = -N\cos\beta \quad \wedge \quad N_z = N\sin\beta$$

y como $\tan = \sin/\cos \Rightarrow \dfrac{1}{\tan\beta} = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} = -\dfrac{N_\rho/N}{N_z/N} = -\dfrac{N_\rho}{N_z}$

$$\therefore N_\rho = -\frac{N_z}{\tan\beta} = -N_z\frac{dz}{d\rho} = -mg\frac{dz}{d\rho} \quad \text{por } \hat{k})$$

Ahora sí, reemplazando en $\hat{\rho}$)

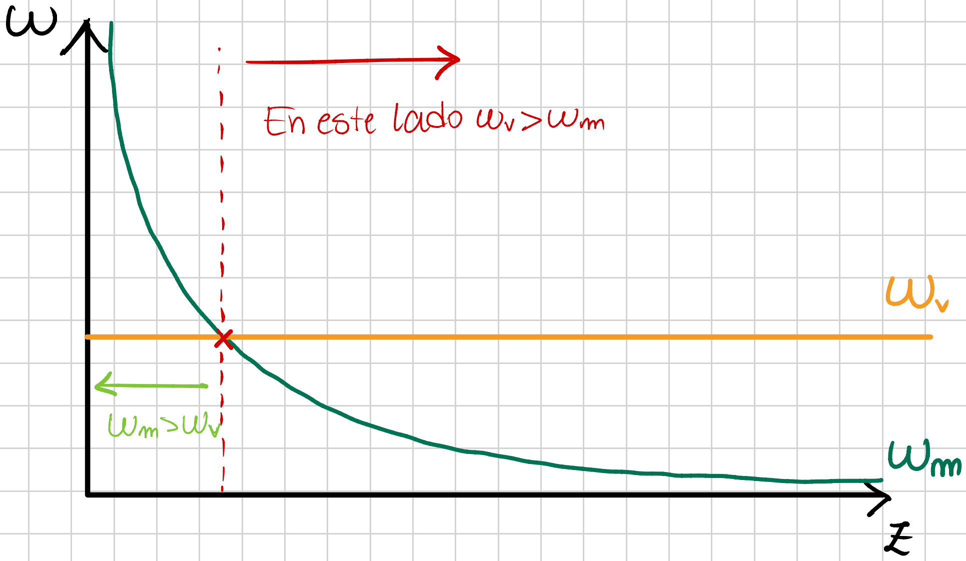
$$\Rightarrow -m\rho\dot{\phi}^2 = -mg\frac{dz}{d\rho}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\phi}(\rho) = \boxed{\sqrt{\frac{g}{\rho}\frac{dz}{d\rho}} \equiv \omega}$$

Reemplazando en ambos casos

- Martini ($z_m = \rho$) : $\dfrac{dz_m}{d\rho} = \dfrac{d\rho}{d\rho} = 1 \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\dfrac{g}{\rho}}$
- Vino ($z_v = H(\rho/R)^2$) : $\dfrac{dz_v}{d\rho} = \dfrac{2H\rho}{R^2} \Rightarrow \omega_v = \sqrt{\dfrac{g}{\rho}\dfrac{2H\rho}{R^2}} = \sqrt{\dfrac{2Hg}{R^2}}$

Para saber cuál tendría mayor velocidad angular, habría que saber la altura en específico, ya que para una altura muy grande $\omega_m \to 0$ (recordar $z_m = \rho$), mientras que ω_v es constante para cualquier altura


ω
En este lado ωv > ωm
ωv
ωm > ωv
ωm
Z