Auxiliar 30

Miedo??

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.- Sólido rígido 1

Dos discos de radio R y masa M ruedan sin resbalar sobre una superficie horizontal, en el interior de una caja de largo $3D$ (con $D >> R$). Los ejes de los discos permanecen conectados entre sí y las paredes mediante resortes de largo natural D y constante elástica k (ver Figura 1). Para describir la configuración del sistema, considere las posiciones x_1 y x_2 del centro de masas de los discos a lo largo del eje x. Cada disco tiene una distribución de masa superficial dad por $\sigma(r) = \frac{6M}{\pi R^4}(Rr - r^2)$, donde r es la distancia al centro del disco.

a) Encuentre expresiones para las velocidades angulares $\vec{\Omega}_1$ y $\vec{\Omega}_2$ de cada disco como función de $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$, respectivamente

b) Encuentre una expresión para la energía cinética de cada disco como función de $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ respectivamente

c) Determine las ecuaciones de movimiento para los discos

d) Encuentre las frecuencias normales del sistema, e ilustre los modos de oscilación correspondiente para cada frecuencia

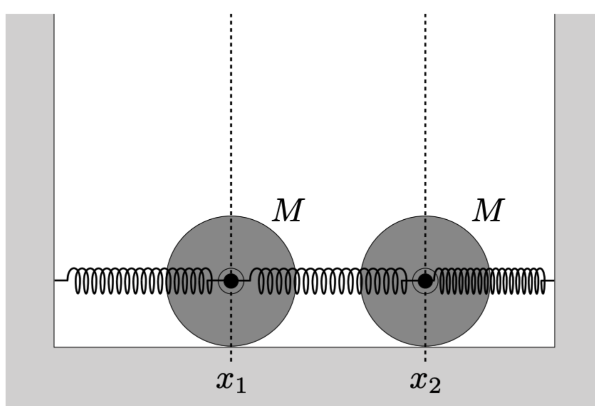


Figura 1: Dos discos atados a resortes

P2.- Sólido rígido 2

Considere una estructura rígida formada por un arco de un aro de radio R y masa M, que tiene en sus extremos dos partículas de masa m cada una (ver Figura 2). El sistema está inicialmente en reposo, apoyado en un soporte colocado en el punto medio del arco (punto P). Se sabe que el arco de aro subtiende un ángulo 2α, como se ve en la figura.

a) Encuentre la distancia desde O hasta el centro de masa de la barra

b) Obtenga el tensor de inercia del sistema (barra + masas) con respecto al punto P

c) Considere que el sistema comienza a oscilar, encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo θ definido como el ángulo entre la línea OP y la vertical

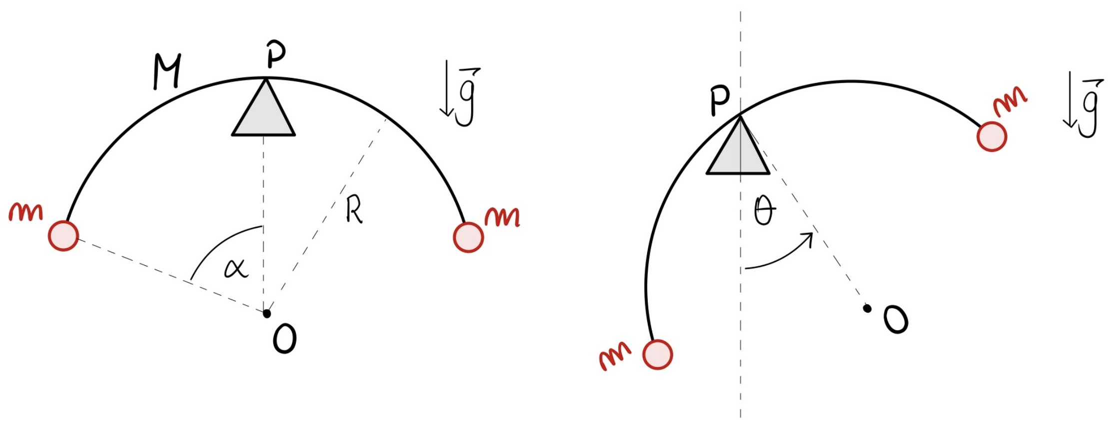


Figura 2: Sistema masas + barra

P3.- Roce 1

Considere el sistema mostrado en la Figura 3. el cual consiste de una guía metálica $ABCDE$ por el cual se desplaza una argolla de masa m. La argolla está unida a un resorte de masa despreciable, de constante elástica k y largo natural R, el cual está pivotado en un soporte fijo en el punto O. El tramo recto AB de la guía y el semicircular BCD (de radio R) no tiene roce, sin embargo el tramo recto DE tiene un coeficiente de roce cinético μ_c. En cierto momento, el sistema se deja evolucionar libremente con la argolla ubicada inicialmente en la posición mostrada en la figura

a) Determine el valor máximo posible m_{max} de la masa m para que la argolla llegue al punto D

b) Calcula la máxima distancia X que alcanza la argolla, si justo al pasar por el punto D ésta se desprende del resorte. Considere que $m = \frac{3}{4}m_{\text{max}}$ donde m_{max} es el valor encontrado en la parte a)

c) Suponga ahora que la argolla no se desprende del resorte, pero que la masa es apenas menor que el valor m_{max} encontrado en la parte a). Es decir, escriba $m = (1-\epsilon)m_{\text{max}}$ con $\epsilon << 1$. Encuentre la distancia δX que la argolla alcanza a recorrer después de pasar por D a orden $\mathcal{O}(\epsilon)$

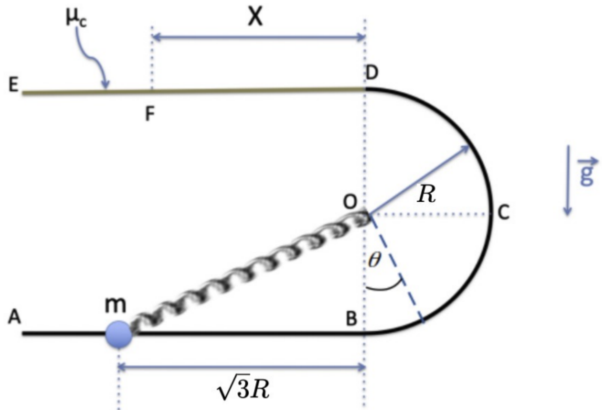


Figura 3: Guía metálica

P4.- **Roce 2**

Considere el siguiente modelo simplificado de la generación de un terremoto por convergencia de placas (ver Figura 4). La partícula de masa m se encuentra apoyada sobre una cuña de $\pi/4$ respecto de la horizontal, a la vez que ligada a una barra vertical fija mediante un resorte horizontal de constante elástica k y largo natural l_0. Entre la partícula y la cuña existen coeficientes de roce estático y cinético de coeficientes μ_e y μ_c, respectivamente.

a) Si la cuña se acerca muy lentamente a la barra vertical, determine el largo del resorte en el momento en que se vence el roce estático y la partícula asciende pendiente arriba sobre la cuña (es decir, el momento en que ocurre el terremoto)

b) Determine el desplazamiento total de la partícula hasta que se detiene nuevamente. Suponga que en este proceso la cuña se mantiene en reposo, el resorte se mantiene horizontal (su otro extremo asciende por la barra vertical), y la partícula no se separa de la cuña

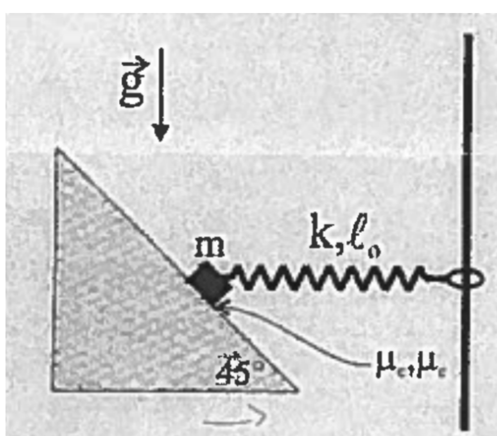


Figura 4: Simulador de terremotos

P5.- **Roce 3**

Un bote, con velocidad inicial v_0, que se mueve solo en una dirección/eje disminuye su velocidad debido a la presencia de una fuerza de rozamiento dependiente de la velocidad v

$$F = -be^{av},$$

donde a, b son constantes positivas conocidas.

a) Encuentre la velocidad del bote como función del tiempo

b) Encuentre el tiempo transcurrido hasta que el bote se detiene

c) Encuentre la distancia recorrida como función del tiempo

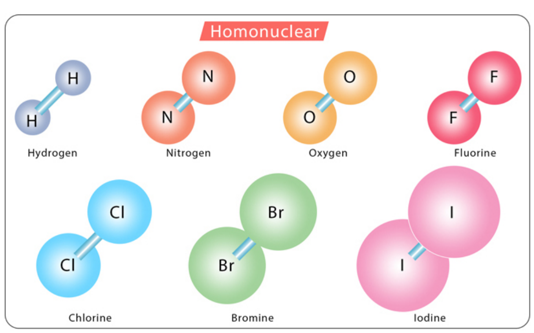
d) ¿Cuál es la distancia recorrida hasta que el bote se detiene?

P6.- Perturbaciones 1

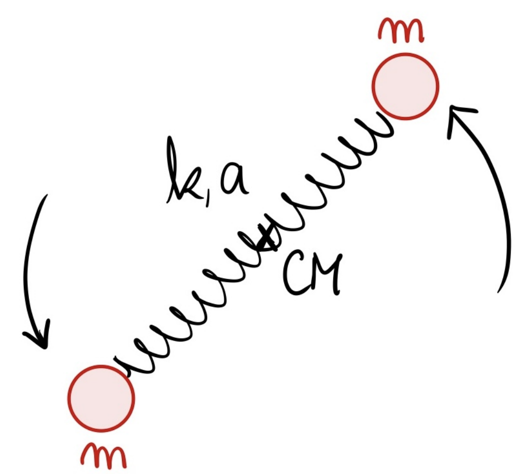
Una molécula diatómica se puede considerar como formada por dos masas m, conectadas por un resorte de constante elástica k y largo natural a (ver Figura). Demuestre que si al molécula rota con un momentum angular $\vec{L}$ y vibra al mismo tiempo, el movimiento de rotación no es uniforme, y tiene una modulación con una frecuencia:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}\left(1 + \frac{6L^2}{kma^4}\right)}.$$

Suponga que la amplitud de vibración es mucho menor que a. ¿Qué sucede si $L = 0$?



(a) Ejemplos moléculas diatómicas



(b) Modelo simple de una molécula diatómica

Formulario

Tensor de inercia

Para un sólido rígido con una distribución continua (no necesariamente homogénea) de masa, su tensor de inercia (tomando como pivote/origen un punto $\mathcal{O}'$) se calcula como

$$I_{\mathcal{O}'} = \int \begin{pmatrix} (y')^2 + (z')^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & (x')^2 + (z')^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & (x')^2 + (y')^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}m'$$

que también se puede escribir como

$$I^{ij}_{\mathcal{O}'} = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)\, \mathrm{d}m \ , \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
El diferencial de masa se expresa de distintas formas según si el sólido es lineal, superficial o volumétrico

$$\mathrm{d}m' = \lambda\, \mathrm{d}l' \ , \quad \mathrm{d}m' = \sigma\, \mathrm{d}A' \ , \quad \mathrm{d}m' = \rho\, \mathrm{d}V' \ ,$$

estás densidades pueden ser homogéneas o depender de la posición en el cuerpo.

Teorema Steiner

Si tenemos calculado el tensor de inercia con respecto al CM, I_{CM}, podemos calcular el tensor de inercia con respecto a otro pivote/origen $\mathcal{O}$ usando el teorema de Steiner

$$I^{ij}_{\mathcal{O}} = I^{ij}_{\text{CM}} + M_{\text{tot}} \left[R^2_{\text{CM}} \delta_{ij} - R_{\text{CM}i} R_{j\text{CM}} \right] \ , \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde $\vec{R}_{\text{CM}} = (R_{\text{CM1}}, R_{\text{CM2}}, R_{\text{CM3}})$ es el vector posición que va desde $\mathcal{O}$ a CM.

Ecuaciones de movimiento

La relación entre el momentum angular y torque de un sólido rígido es:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}$$

donde $\vec{L} = I_{\mathcal{O}} \vec{\Omega}$ con $I_{\mathcal{O}}$ el tensor de inercia medido c/r al pivote y $\vec{\Omega}$ el vector velocidad angular del cuerpo.

La segunda Ley de Newton para un sólido rígido se expresa como:

$$M_{\text{tot}} \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

con M_{tot} la masa total, $\vec{R}$ el vector posición del centro de masa y $\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}^{\text{ext}}_i$ la suma de las fuerzas externas actuando sobre el sólido rígido.

Energía y Lagrangiano de un sólido rígido

La energía cinética de un sólido rígido está dada por

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^{\,t} I_{\mathrm{CM}} \vec{\Omega}\,,$$

donde $\vec{v}_{\mathrm{CM}}$ es la velocidad del centro de masas, $\vec{\Omega}$ la velocidad angular de sólido I_{CM} el tensor de inercia **medido c/r al CM**. Luego, su energía mecánica es

$$E = K(\dot{q}) + U(q)\,,$$

donde U es la energía potencial asociada a fuerzas conservativas externas actuando sobre el sólido. Mientras que el Lagrangiano es

$$L = K(\dot{q}) - U(q)$$

con el que se obtiene las ecuaciones de movimiento ocupando las ecuaciones de Euler-Lagrange usuales

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}\,.$$

Auxiliar 30

P1 Sólido rígido 1

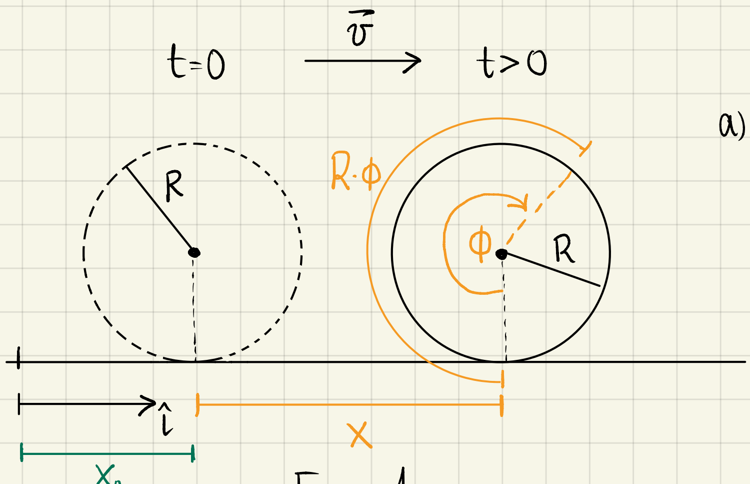


Figura 1

a) De la figura 1 notamos que para un sólido rígido que rueda sin resbalar tenemos la relación

$$R\cdot\phi = x \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{R}$$

donde ϕ es el ángulo que giró desde un $t=0$ hasta un $t>0$. Por lo que la posición del CM, $\vec{R}_{cm}$ sería

$$\vec{R}_{CM} = X_0\hat{\imath} + R\phi\hat{\imath} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = R\dot{\phi}\hat{\imath} = \dot{x}\hat{\imath}$$

Esto lo podemos aplicar a los dos discos del problema : $\dot{\phi}_1 = \dot{x}_1/R$ y $\dot{\phi}_2 = \dot{x}_2/R$, donde notamos que no nos importa la distancia al origen, el x_0, sino que solo la tasa de cambio de las posiciones, los $\dot{x}_i$.

Usando la regla de la mano derecha notamos que las velocidades angulares son en $-\hat{k}$ únicamente

$$\vec{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\phi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}_1}{R} \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}_2}{R} \end{pmatrix}$$

b) La energía cinética de un sist. de sólidos rígidos es la suma de cada K_i por separado

$$K = \sum_{i=1}^{2} K_i = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}M_i|\dot{\vec{R}}_{CM,i}|^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_i^t\, I_{CM,i}\,\vec{\Omega}_i\right)$$

así que necesitamos los $I_{CM,i}$, ambos discos son iguales así que hacemos el cálculo una vez

Como siempre, nos olvidamos que el disco está girando y lo consideramos en reposo. Definimos un sist. cartesianos en naranjo que pasamos al cilíndrico en rojo debido a ser un objeto circular

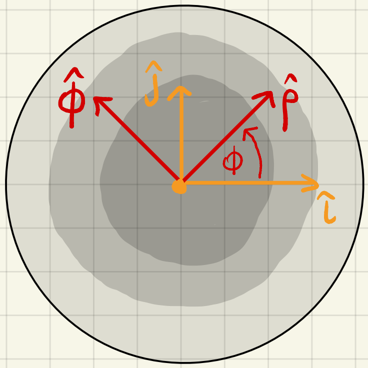


Figura 2

$$x = \rho\cos\phi \quad , \quad y = \rho\sin\phi \quad , \quad dm = \sigma(\rho)\,dA = \frac{6M}{\pi R^4}(R\rho - \rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\phi$$

Por exp sabemos que solo los componentes diagonales son $\neq 0$, por lo que cuando hagamos el producto $I_{CM,i}\vec{\Omega}_i$

$$= \begin{pmatrix} I^{11}_{CM} & 0 & 0 \\ 0 & I^{22}_{CM} & 0 \\ 0 & 0 & I^{33}_{CM} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}_i}{R} \end{pmatrix} = -I^{33}_{CM,i}\frac{\dot{x}_i}{R}$$

, así que solo necesitamos I^{33}_{CM}

Considerando $\rho \in [0,R]$ y $\phi \in [0,2\pi]$

$$\triangleright\ I^{33}_{CM} = \int_0^{2\pi}\int_0^R (x^2+y^2)\,\frac{6M}{\pi R^4}(R\rho-\rho^2)\,\rho\, d\rho\, d\phi = \frac{6M}{\pi R^4}\int_0^{2\pi} d\phi \cdot \left[R\int_0^R \rho^4 d\rho - \int_0^R \rho^5 d\rho\right]$$

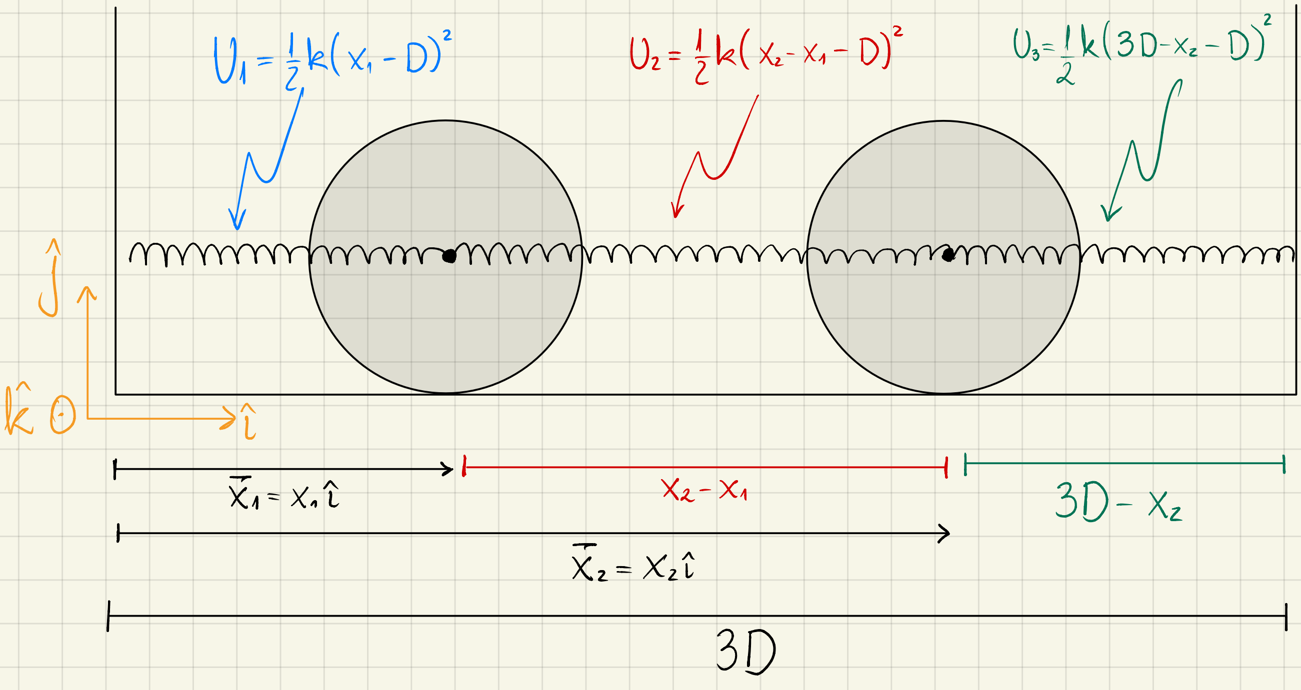
$$= \frac{12M}{R^4}\left[\frac{R^6}{5}-\frac{R^6}{6}\right] = \frac{12M}{R^4}\,\frac{R^6}{6\cdot 5} = \frac{2}{5}MR^2$$

así que $\vec{\Omega}_1^t\, I_{CM,1}\,\vec{\Omega}_1 = (0\ \ 0\ \ -\dot{x}_1/R)\cdot \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{2}{5}MR\dot{x}_1\end{pmatrix} = \frac{2}{5}M\dot{x}_1^2 \ \wedge\ \vec{\Omega}_2^t\, I_{CM,2}\,\vec{\Omega}_2 = \dots = \frac{2}{5}M\dot{x}_2^2$

mientras que $\dot{\vec{R}}_{CM,i} = \dot{x}_i\,\hat{\imath} \Rightarrow |\dot{\vec{R}}_{CM,i}|^2 = \dot{x}_i^2$

$$\therefore K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{5}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{5}M\dot{x}_2^2 = \frac{7}{10}M\dot{x}_1^2 + \frac{7}{10}M\dot{x}_2^2$$

c) Ahora ocuparemos Lagrangiano $L = K - U = \sum_i K_i - \sum_j U_j$, donde ya tenemos K y para U tenemos la energía potencial de los 3 resortes



$$\Rightarrow U = \sum_i U_i = \frac{1}{2}k(x_1 - D)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - D)^2 + \frac{1}{2}k(2D - x_2)^2$$

$$\therefore L = K - U = \frac{7}{10}M\dot{x}_1^2 + \frac{7}{10}M\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - D)^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - D)^2 - \frac{1}{2}k(2D - x_2)^2$$

Ahora calculamos las ecs. de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - D) + k(x_2 - x_1 - D)$$

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{7}{5} M \dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{7}{5} M \ddot{x}_1$$

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2 - x_1 - D) + k(2D - x_2)$$

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{7}{5} M \dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{7}{5} M \ddot{x}_2$$

$$\frac{7}{5} M \ddot{x}_1 = -2k x_1 + k x_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}_1 + \frac{10}{7}\frac{k}{M} x_1 - \frac{5}{7}\frac{k}{M} x_2 = 0}$$

$$\frac{7}{5} M \ddot{x}_2 = k x_1 - 2k x_2 + 3D$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}_2 - \frac{5}{7}\frac{k}{M} x_1 + \frac{10}{7}\frac{k}{M} x_2 - \frac{15}{7}\frac{kD}{M} = 0}$$

lo pueden hacer viendo cuándo los resortes no están ejerciendo fuerza

d) Encontramos los ptos. de equilibrio con $\partial L / \partial x_i = 0 \Rightarrow x_{0,1} = D$ y $x_{0,2} = 2D$

$$\Rightarrow x_1 \equiv D + \delta x_1 \quad \text{y} \quad x_2 \equiv 2D + \delta x_2$$

de esta forma se anula la parte inhomogénea cte. de las ecs. de movimiento

$$\therefore \boxed{\delta\ddot{x}_1 + \frac{5}{7}\frac{k}{M}(2\delta x_1 - \delta x_2) = 0} \quad \wedge \quad \boxed{\delta\ddot{x}_2 + \frac{5k}{7M}(-\delta x_1 + 2\delta x_2) = 0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \delta\ddot{x}_1 \\ \delta\ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \frac{5k}{7M}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \Omega^2_{2\times2} = \underbrace{\frac{5k}{7M}}_{\equiv \beta}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ec de autovalores $\det(\Omega^2_{2\times2} - \omega^2 \mathbb{I}_{2\times2}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2\beta - \omega^2 & -\beta \\ -\beta & 2\beta - \omega^2 \end{vmatrix} = (2\beta - \omega^2)^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow 2\beta - \omega^2 = \pm\beta \Leftrightarrow \omega^2 = 2\beta \mp \beta$$

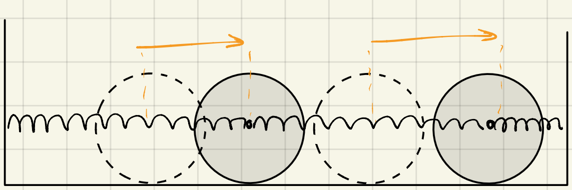
$$\Leftrightarrow \omega_1^2 = \beta \quad \wedge \quad \omega_2^2 = 3\beta$$

Calculamos los autovectores

$$\begin{pmatrix} 2\beta - \beta & -\beta \\ -\beta & 2\beta - \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \Rightarrow v_1 = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\beta - 3\beta & -\beta \\ -\beta & 2\beta - 3\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_2 = -b_2 \Rightarrow v_2 = a_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

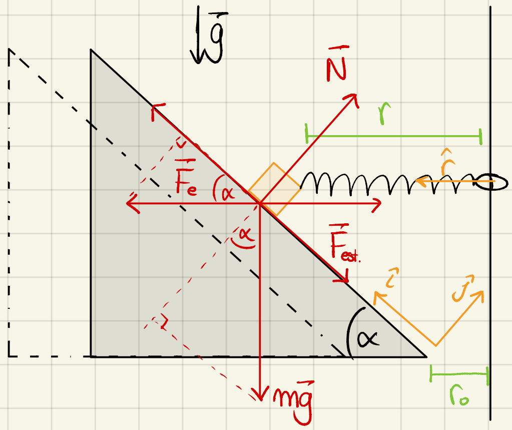
normalizando $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Modo v_1

Modo v_2

P4 Roce 2



a) Definamos r como la distanca variable entre la partícula y la vara y r_0 la distancia variable desde el origen O y la vara.

Identificamos las fuerzas cuando la masa todavía no se mueve

- Normal: $\vec{N} = N\hat{\jmath}$
- Peso: $m\vec{g} = -mg\sin\alpha\hat{\imath} - mg\cos\alpha\hat{\jmath}$
- Elástica: $\vec{F}_e = -k(r-l_0)\hat{r} = -k(r-l_0)(\cos\alpha\hat{\imath} - \sin\alpha\hat{\jmath})$
- Roce estático: $\vec{F}_{est} = F_{est}\hat{\imath}$ ← no nos importa el sentido

En presencia de roce estático, para que una partícula no se mueva se debe cumplir

$$\Big|\sum_{i \neq \text{roce est.}} F_{i,x}\Big| \leq \mu_e |N| \quad (1)$$

solo las componentes $\perp$ a $\vec{N}$

Debemos calcular la expresión de la normal, hacemos segunda Ley de Newton donde $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$

$$m\vec{a} = \sum_i F_i$$

$$m\cancel{\ddot{x}}\hat{\imath} + m\cancel{\ddot{y}}\hat{\jmath} = N\hat{\jmath} - mg\sin\alpha\hat{\imath} - mg\cos\alpha\hat{\jmath} - k(r-l_0)(\cos\alpha\hat{\imath} - \sin\alpha\hat{\jmath}) + F_{est}\hat{\imath}$$

$\hat{\imath}$) $0 = -mg\sin\alpha - k(r-l_0)\cos\alpha + F_{est}$

$\hat{\jmath}$) $0 = N - mg\cos\alpha + k(r-l_0)\sin\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha - k(r-l_0)\sin\alpha > 0$ ← o sino se despega

reemplazamos esta expresión de N y $\sum_{i=\text{roce estático}} F_{i,x} = -mg\sin\alpha - k(r-l_0)\cos\alpha$ en (1)

$$\Rightarrow \big|\underbrace{-mg\sin\alpha - k(r-l_0)\cos\alpha}_{(I)}\big| \leq \mu_e \big|\underbrace{mg\cos\alpha - k(r-l_0)\sin\alpha}_{(II)}\big|$$

tenemos que (II) > 0 (de otra forma $N<0$ y la partícula se habría despegado), por lo que podemos quitar ese valor absoluto. Para (I) tenemos que como cuando se venza el roce estático la partícula subirá por la pendiente por lo que (I) > 0 y $\vec{F}_{est}$ va en la dirección de $-\hat{\imath}$ ya que se opone a que la partícula suba, así que tmb. sacamos este valor absoluto

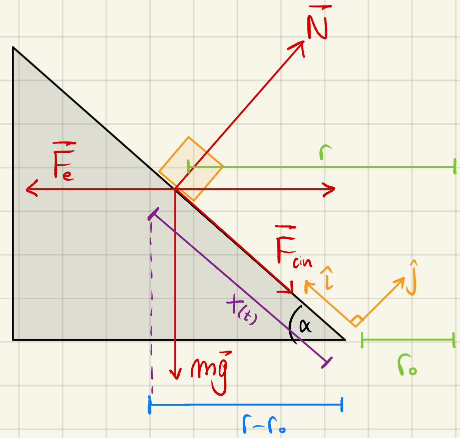
$$\Rightarrow -mg\sin\alpha - k(r-l_0)\cos\alpha \leq \mu_e(mg\cos\alpha - k(r-l_0)\sin\alpha)$$

y como nos interesa el momento justo cuando se vence el roce estático, tomamos la igualdad

$$\Rightarrow -mg\sin\alpha - k(r-l_0)\cos\alpha \stackrel{!}{=} \mu_e(mg\cos\alpha - k(r-l_0)\sin\alpha) \Leftrightarrow r = \frac{-mg(\sin\alpha + \mu_e\cos\alpha) + kl_0(\cos\alpha - \mu_e\sin\alpha)}{k(\cos\alpha - \mu_e\sin\alpha)}$$

b) Como la partícula comienza moviéndose en $+\hat{\imath}$, en el intervalo de tiempo que estamos interesados tenemos que el roce cinético es:

$$\vec{F}_{cin} = -\mu_c N \hat{\imath}$$



Hacemos segunda Ley de Newton con $\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$ y la sum. de fuerzas como

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{F}_{est}$$

$$= N\hat{\jmath} - mg\sin\alpha\,\hat{\imath} - mg\cos\alpha\,\hat{\jmath} - k(r-l_0)\cos\alpha\,\hat{\imath} + k(r-l_0)\sin\alpha\,\hat{\jmath} - \mu_c N\hat{\imath}$$

pero nuestra variable dinámica es x, no r así que las relacionamos $\frac{r-r_0}{x} = \cos\alpha \Leftrightarrow r = x\cdot\cos\alpha + r_0$, reemplazamos en la fuerza elástica

$$m\ddot{x}\hat{\imath} = N\hat{\jmath} - mg\sin\alpha\,\hat{\imath} - mg\cos\alpha\,\hat{\jmath} - k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\cos\alpha\,\hat{\imath} + k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\sin\alpha\,\hat{\jmath} - \mu_c N\hat{\imath}$$

$\hat{\imath}$) $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\cos\alpha - \mu_c N$

$\hat{\jmath}$) $0 = N - mg\cos\alpha + k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\sin\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha - k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\sin\alpha > 0$

reemplazamos la normal en $\hat{\imath}$)

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\cos\alpha + \mu_c mg\cos\alpha - \mu_c k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = b\,,$$

donde $\omega_0^2 \equiv \frac{k\cos^2\alpha}{m} + \frac{\mu_c k}{m}\cos\alpha\cdot\sin\alpha$ y $b \equiv -mg\sin\alpha - k(r_0 - l_0)\cos\alpha + \mu_c mg\cos\alpha - \mu_c k(r_0 - l_0)\sin\alpha$

Para homogeneizar hacemos $u \equiv x - \frac{b}{\omega_0^2} \Rightarrow \ddot{u} = \ddot{x}$ $\therefore$ $\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0}$ (*)

Obtuvimos la expresión de un oscilador armónico de frecuencia angular ω_0, por lo tanto de periodo $T = 2\pi/\omega_0$ así que en el momento que se detiene por primera vez es en $t^* = T/2$ la mitad del ciclo. Sabemos que la sol de (*) es

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{b}{\omega_0^2}$$

donde A y B están dados por C.I., así que el desplazamiento hasta que se detiene es

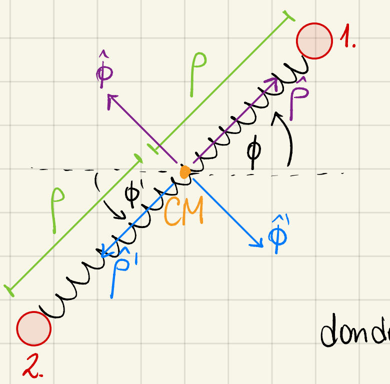
$$x(t^* = T/2 = \pi/\omega_0) = A\cos(\pi) + B\sin(\pi) + \frac{b}{\omega_0^2} = -A + \frac{b}{\omega_0^2}$$

P6 Perturbaciones 1

a) Debido a que no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema (el resorte comunica a las partículas del sist.)

$$M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = \vec{cte}$$

así que el CM durante todo el mov. se quedará quieto en el espacio (a menos que se le haya dado una velocidad inicial). es como si pusieramos un clavo en ese punto y las masas rotan en torno a él. Además, el CM estaría justo al medio de la distancia entre la partícula 1. y 2.



pueden considerar que $K_{CM} \neq 0$, pero cte, así que no afecta las EoMs

Ocupariemos lagrangiano, la energía cinética es $K = K_{CM} + K_{1,c/r\,CM} + K_{2,c/r\,CM}$ donde dijimos que $\dot{\vec{R}}_{CM} = \vec{0} \Rightarrow K_{CM} = 0$, mientras que los otros dos términos son las energías cinéticas de 1. y 2. c/r al CM. Definimos dos sist. cilíndricos distintos (pero relacionados $\hat{\rho} = -\hat{\rho}' \wedge \hat{\phi} = -\hat{\phi}'$)

$$\vec{r}_1 = \rho\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} \quad \wedge \quad \vec{r}_2 = \rho\hat{\rho}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\rho}\hat{\rho}' + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}'$$

donde $\phi' = \phi \Rightarrow \dot{\phi}' = \dot{\phi}$, así que las energías cinéticas son

$$K_{1\,c/r\,CM} + K_{2\,c/r\,CM} = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}_2|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) = m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2)$$

Ahora definamos la energía potencial. Como hay un solo resorte $\Rightarrow$ solo una contribución a la energía potencial

$$U = U_e = \frac{1}{2}k(r-a)^2 = \frac{1}{2}k(2\rho - a)^2$$

$$\therefore L = K - U = m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) - \frac{1}{2}k(2\rho - a)^2$$

Calculemos las ecs. de Euler-Lagrange para los dos grados de libertad: ρ y ϕ

- $\frac{\partial L}{\partial \rho} = 2m\rho\dot{\phi}^2 - 2k(2\rho - a)$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = 2m\dot{\rho} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) = 2m\ddot{\rho}$

$$2m\ddot{\rho} = 2m\rho\dot{\phi}^2 - 2k(2\rho - a) \quad (1)$$

- $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2m\rho^2\dot{\phi}$

conservación

$$\frac{d}{dt}(2m\rho^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow 2m\rho^2\dot{\phi} = cte = L \quad (2)$$, el momentum angular del sistema

Reemplazando (2) en (1) $\Rightarrow 2m\ddot{\rho} = 2m\rho\frac{L^2}{4m^2\rho^4} - 2k(2\rho - a) \Leftrightarrow \ddot{\rho} - \frac{L^2}{4m^2\rho^3} + \frac{2k\rho}{m} - \frac{ka}{m} = 0 \quad (*)$

que todavía no tiene forma de oscilador armónico (esto queremos), notemos que si hacemos $\rho = a/2 + \delta\rho$ con $\delta\rho \ll 1$ cancelamos el término inhomogéneo

$$\ddot{\delta\rho} - \frac{L^2}{4m^2(a/2+\delta\rho)^3} + \frac{2k}{m}\delta\rho = 0 \quad (3)$$

ya que $\rho = a/2$ es un pto. de equilibrio cuando $L=0$. Ahora, hagamos un Taylor al término cúbico c/r a $\delta\rho_0 = 0$

$$\frac{1}{(a/2+\delta\rho)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(a/2+\delta\rho)^3}\right)^{(n)}\Bigg|_{\delta\rho=0} \cdot (\delta\rho - \underbrace{\cancel{\delta\rho_0}}_{=0})^n = \frac{8}{a^3} - \frac{3}{(a/2+\delta\rho)^4}\Bigg|_{\delta\rho=0} \cdot \delta\rho + \mathcal{O}(\delta\rho^2)$$

$$\approx \frac{8}{a^3} - \frac{48}{a^4}\delta\rho$$

Reemplazamos esta aproximación en (3)

$$\ddot{\delta\rho} - \frac{L^2}{4m^2}\left[\frac{8}{a^3} - \frac{48}{a^4}\delta\rho\right] + \frac{2k}{m}\delta\rho = 0$$

$$\iff \ddot{\delta\rho} + \left[\frac{12L^2}{m^2a^4} + \frac{2k}{m}\right]\delta\rho = \frac{2L^2}{m^2a^3} \longleftarrow \text{movimiento armónico!}$$

donde identificamos la frecuencia de oscilación $\omega_0^2 = \sqrt{\frac{12L^2}{m^2a^4} + \frac{2k}{m}}$

Aproximación con serie de Taylor

No importa si hacemos el Taylor para (3) o con (*), para este último tendríamos

$$\frac{1}{\rho^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{\rho^3}\right)^{(n)}\Bigg|_{\rho=a/2}(\rho - a/2)^n = \frac{1}{(a/2)^3} - \frac{3}{\rho^4}\Bigg|_{\rho=a/2}(\rho - a/2) + \mathcal{O}((\rho-a/2)^2)$$

nuestro nuevo x_0

$$\approx \frac{8}{a^3} - \frac{48}{a^4}(\rho - a/2) = \frac{8}{a^3} + \frac{24}{a^3} - \frac{48}{a^4}\rho = \frac{32}{a^3} - \frac{48}{a^4}\rho$$

reemplazando en (*)

$$\Rightarrow \ddot{\rho} - \frac{L^2}{4m^2}\left[\frac{32}{a^3} - \frac{48}{a^4}\rho\right] + \frac{2k\rho}{m} - \frac{ka}{m} = 0 \iff \ddot{\rho} + \left[\frac{12L^2}{m^2a^4} + \frac{2k}{m}\right]\rho = \overbrace{\frac{ka}{m} + \frac{8L^2}{m^2a^3}}^{\text{constante}}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{12L^2}{m^2a^4} + \frac{2k}{m}$$, con lo que obtenemos lo mismo