Auxiliar 2

Cuantización canónica

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliar: Javier Huenupi

P1.-

Considere un campo escalar complejo φ (o sea, no hermítico) con una densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi + \Omega_0.$$

a) Muestre que φ obedece la ecuación de Klein-Gordon.

b) Trate φ y $\varphi^\dagger$ como campos independientes, y encuentre el momentum conjugado para cada uno. Calcule la densidad hamiltoniana en términos de los momentum conjugados y los mismos campos (sin derivadas temporales).

c) Escriba la expansión de φ como

$$\varphi(x) = \int \widetilde{\mathrm{d}k} \Big[a(\mathbf{k}) e^{ikx} + b^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \Big].$$

Exprese $a(\mathbf{k})$ y $b(\mathbf{k})$ en términos de φ y $\varphi^\dagger$ y sus derivadas temporales.

d) Asumiendo relaciones de conmutación canónicas para los campos y sus momentum conjugados, encuentre las relaciones de conmutación obedecidas por $a(\mathbf{k})$ y $b(\mathbf{k})$ y sus conjugados hermíticos.

e) Exprese el hamiltoniano en términos de $a(\mathbf{k})$ y $b(\mathbf{k})$ y sus hermíticos conjugados. ¿Qué valor debe tener Ω_0 para que el estado basal tenga energía cero?

Auxiliar 2

P1

Consideraremos el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi + \Omega_0 \quad (1)$$

con $\varphi, \varphi^\dagger$ independientes.

a) Dada la densidad (1), la acción está dada por

$$S = \int dt\, L = \int d^4x\, \mathcal{L} = \int d^4x \left(-\partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi + \Omega_0 \right)$$

y las EoMs que siguen los campos estarían dadas por $\delta S / \delta \Phi_i \overset{!}{=} 0$. Variemos la acción

$$\delta S[\varphi, \varphi^\dagger] = \int d^4x \left(-\partial^\mu (\delta\varphi^\dagger) \partial_\mu \varphi - \partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu (\delta\varphi) - m^2 (\delta\varphi^\dagger)\varphi - m^2 \varphi^\dagger (\delta\varphi) \right)$$

$$= \int d^4x \left[-\partial^\mu \left((\delta\varphi^\dagger) \partial_\mu \varphi \right) + (\partial^\mu \partial_\mu \varphi) \delta\varphi^\dagger - \partial_\mu \left((\delta\varphi) \partial^\mu \varphi^\dagger \right) + (\partial^\mu \partial_\mu \varphi^\dagger) \delta\varphi - m^2 \varphi^\dagger (\delta\varphi) - m^2 \varphi (\delta\varphi^\dagger) \right]$$

$$= \int d^4x \left[(\partial^\mu \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi) \delta\varphi^\dagger + (\partial^\mu \partial_\mu \varphi^\dagger - m^2 \varphi^\dagger) \delta\varphi \right] - \int d^3y\, n^\mu \left[(\delta\varphi^\dagger) \partial_\mu \varphi + (\delta\varphi) \partial_\mu \varphi^\dagger \right]$$

donde la segunda integral viene de teorema de Stokes

$$\int_M d^n x \sqrt{|g|}\, \nabla^\mu V_\mu = \int_{\partial M} d^{n-1} y \underbrace{\sqrt{|h|}}_{\text{métrica del boundary}} \overbrace{n^\mu}^{\text{vectores unitarios } \perp \text{ al boundary}} V_\mu$$

y está evaluada en el boundary de nuestro espacio-tiempo, donde podemos tomar

$$\delta\varphi(x) \Big|_{x \in \partial M} = \delta\varphi^\dagger(x) \Big|_{x \in \partial M} = 0$$

y despreciar estos términos de borde

$$\Rightarrow \delta S[\varphi, \varphi^\dagger] = \int d^4x \left[(\partial^\mu \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi) \delta\varphi^\dagger + (\partial^\mu \partial_\mu \varphi^\dagger - m^2 \varphi^\dagger) \delta\varphi \right]$$

Ahora, la derivada funcional de S esta definida como

$$\delta S[\varphi, \varphi^\dagger] = \int d^4x \frac{\delta S}{\delta \Phi_i} \delta \Phi_i \,, \quad \text{con } \Phi_i \in \{\varphi, \varphi^\dagger\}$$

con lo que identificamos

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = (\partial^\mu \partial_\mu \varphi^\dagger - m^2 \varphi^\dagger) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\delta S}{\delta \varphi^\dagger} = (\partial^\mu \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi) \stackrel{!}{=} 0$$

$\therefore$ φ y $\varphi^\dagger$ cumplen Klein-Gordon

b) El momentum conjugado de un campo Φ_i está definido como

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_i}$$

Notemos que podemos reescribir (1) como

$$\mathcal{L} = -\partial^0 \varphi^\dagger \partial_0 \varphi - \partial^i \varphi^\dagger \partial_i \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi + \Omega_0$$

$$= \dot{\varphi}^\dagger \dot{\varphi} - \partial^i \varphi^\dagger \partial_i \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi + \Omega_0$$

entonces $\triangleright\ \pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^\dagger$ $\qquad \triangleright\ \pi^\dagger \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\dagger} = \dot{\varphi}$

La densidad hamiltoniana es, por definición,

$$\mathcal{H} = \sum_i \pi_i \dot{\Phi}_i - \mathcal{L}$$

$$= 2\pi\pi^\dagger - \pi\pi^\dagger + \partial^i \varphi^\dagger \partial_i \varphi + m^2 \varphi^\dagger \varphi - \Omega_0$$

$$= \pi^\dagger \pi + \partial^i \varphi^\dagger \partial_i \varphi + m^2 \varphi^\dagger \varphi - \Omega_0$$

c) Expresamos φ como $\varphi(x) = \int \widetilde{dk} \left[a(\vec{k}) e^{ikx} + b^\dagger(\vec{k}) e^{-ikx} \right]$

$\star\ x\cdot(k-k') = -t(\omega-\omega') + \vec{x}\cdot(\vec{k}-\vec{k}')$

$$\Rightarrow \int d^3x\, e^{-ik'x} \varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \int d^3x \left[a(\vec{k}) e^{ix(k-k')} + b^\dagger(\vec{k}) e^{-ix(k+k')} \right]$$

$$= \int \frac{d^3k}{2\omega} \left[a(\vec{k}) e^{-it(\omega-\omega')} \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') + b^\dagger(\vec{k}) e^{it(\omega+\omega')} \delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') \right]$$

$$= \frac{1}{2\omega'} \left[a(\vec{k}') + b^\dagger(\vec{k}') e^{2i\omega' t} \right] \quad (2)$$

También podemos ocupar la derivada temporal de $\varphi(x)$

$$\partial_0 \varphi(x) = \int \widetilde{dk} \left[a(\vec{k}) ik_0 e^{ikx} + b^\dagger(\vec{k})(-ik_0) e^{-ikx} \right]$$

$$= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \cdot 2} \left[-a(\vec{k}) e^{ikx} + b^\dagger(\vec{k}) e^{-ikx} \right]$$

y hacendo el mismo truco

$$\Rightarrow \int d^3x\, e^{-ik'x}\,\partial_0\varphi(x) = \frac{i}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int d^3x \left[-a(\vec{k})e^{-it(\omega-\omega')}e^{i\vec{x}(\vec{k}-\vec{k}')} + b^\dagger(\vec{k})e^{it(\omega+\omega')}e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{k}+\vec{k}')}\right]$$

$$= \frac{i}{2}\left[-a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})e^{2it\omega'}\right] \quad (3)$$

Reemplacemos (2) en (3) usando que

$$(2) \Rightarrow b^\dagger(\vec{k})e^{2i\omega t} = -a(\vec{k}) + 2\omega\int d^3x\, e^{-ikx}\varphi(x)$$

$$\hookrightarrow (3) \Rightarrow a(\vec{k}) = b^\dagger(\vec{k})e^{2i\omega t} + 2i\int d^3x\, e^{-ikx}\,\partial_0\varphi(x)$$

$$= -a(\vec{k}) + 2\int d^3x\, e^{-ikx}\left(\omega\varphi(x) + i\,\partial_0\varphi(x)\right)$$

$$\Rightarrow a(\vec{k}) = i\int d^3x\, e^{ikx}\,\overleftrightarrow{\partial_0}\,\varphi(x) \quad (4)$$

donde $f\overleftrightarrow{\partial}g = f(\partial g) - g(\partial f)$. Remplazando (4) en (2)

$$(2) \Rightarrow b^\dagger(\vec{k}) = e^{-2i\omega t}\left[-\int d^3x\, e^{-ikx}\left(\omega\varphi(x) + i\,\partial_0\varphi(x)\right) + 2\omega\int d^3x\, e^{-ikx}\varphi(x)\right]$$

$$= e^{-2i\omega t}\int d^3x\, e^{-ikx}\left(\omega\varphi(x) - i\,\partial_0\varphi(x)\right) \quad (5)$$

Deberíamos hacer lo mismo para $\varphi^\dagger$, pero simplemente tomaremos el dagger de (4) y (5)

$$a^\dagger(\vec{k}) = \int d^3x\, e^{+ikx}\left(\omega\varphi^\dagger - i\,\partial_0\varphi^\dagger\right) \quad (6) \qquad \wedge \qquad b(\vec{k}) = e^{+2i\omega t}\int d^3x\, e^{+ikx}\left(\omega\varphi^\dagger(x) + i\,\partial_0\varphi^\dagger(x)\right) \quad (7)$$

d) Las relaciones de conmutación canónicas son

$$[\varphi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{x}')] = [\varphi^\dagger(t,\vec{x}), \pi^\dagger(t,\vec{x}')] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

y 0 todo el resto. Entonces

$$\triangleright\ [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \int d^3x_1 d^3x_2\, e^{-ikx_1}e^{+ik'x_2}\left[\omega\varphi(t,\vec{x}_1) + i\pi^\dagger(t,\vec{x}_1),\ \omega'\varphi^\dagger(t,\vec{x}_2) - i\pi(t,\vec{x}_2)\right]$$

$$= \int d^3x_1 d^3x_2\, e^{-ikx_1}e^{+ik'x_2}\left(-i\omega[\varphi(t,\vec{x}_1), \pi(t,\vec{x}_2)] + i\omega'[\pi^\dagger(t,\vec{x}_1), \varphi^\dagger(t,\vec{x}_2)]\right)$$

$$= \int d^3x_1 d^3x_2\, e^{-ikx_1}e^{+ik'x_2}\left(-i\omega\cdot i\delta^{(3)}(\vec{x}_1-\vec{x}_2) + i\omega'\cdot(-i\delta^{(3)}(\vec{x}_1-\vec{x}_2))\right)$$

$$= \int d^3x\, e^{+it(\omega-\omega')} e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{k}-\vec{k}')} (\omega + \omega')$$

$$= 2\omega\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$$

▷ $$[b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = \int d^3x_1 d^3x_2\, e^{ikx_1} e^{-ik'x_2} e^{+2i\omega t} e^{-2i\omega' t} [\omega \varphi^\dagger(t,\vec{x}_1) + i\pi(t,\vec{x}_1), \omega' \varphi(t,\vec{x}_2) - i\pi^\dagger(t,\vec{x}_2)]$$

$$= \int d^3x_1 d^3x_2\, e^{ikx_1} e^{-ik'x_2} e^{+2i\omega t} e^{-2i\omega' t} (-i\omega [\varphi^\dagger(t,\vec{x}_1), \pi^\dagger(t,\vec{x}_2)] + i\omega' [\pi(t,\vec{x}_1), \varphi(t,\vec{x}_2)])$$

$$= \int d^3x_1 d^3x_2\, e^{ikx_1} e^{-ik'x_2} e^{+2i\omega t} e^{-2i\omega' t} (\omega\, \delta^{(3)}(\vec{x}_1-\vec{x}_2) + \omega' \delta^{(3)}(\vec{x}_1-\vec{x}_2))$$

$$= \int d^3x\, e^{ix(k-k')} e^{2it(\omega-\omega')} (\omega + \omega')$$

$$= 2\omega\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$$

Queda propuesto hacer el resto de conmutadores, que darían 0 por cachativa

e) Usemos el resultado de **b)** y reemplazamos con las expansiones de φ y $\varphi^\dagger$

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H}$$

$$= \int d^3x \left(\pi^\dagger \pi + \partial^i \varphi^\dagger \partial_i \varphi + m^2 \varphi^\dagger \varphi - \Omega_0 \right)$$

$$\begin{aligned} = -\Omega_0 V + \int d^3x \int \tilde{dk}\, \tilde{dk'} \Big[& i\omega(-a(\vec{k}) e^{ikx} + b^\dagger(\vec{k}) e^{-ikx})(-i\omega')(-a^\dagger(\vec{k}') e^{-ik'x} + b(\vec{k}') e^{ik'x}) \\ & + ik^i(-a^\dagger(\vec{k}) e^{-ikx} + b(\vec{k}) e^{ikx}) \cdot (-ik'_i)(-a(\vec{k}') e^{ik'x} + b^\dagger(\vec{k}') e^{-ik'x}) \\ & + m^2 (a^\dagger(\vec{k}) e^{-ikx} + b(\vec{k}) e^{ikx})(a(\vec{k}') e^{ik'x} + b^\dagger(\vec{k}') e^{-ik'x}) \Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = -\Omega_0 V + \int d^3x \int \tilde{dk}\, \tilde{dk'} \Big[& \omega\omega' (a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') e^{ix(k-k')} - a(\vec{k}) b(\vec{k}') e^{ix(k+k')} - b^\dagger(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') e^{-ix(k+k')} + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}') e^{ix(k'-k)}) \\ & + k^i k'_i (a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}') e^{ix(k'-k)} - a(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}') e^{-ix(k+k')} - b(\vec{k}) a(\vec{k}') e^{ix(k'+k)} + b(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}') e^{ix(k-k')}) \\ & + m^2 (a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}') e^{ix(k'-k)} + a^\dagger(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}') e^{-ix(k+k')} + b(\vec{k}) a(\vec{k}') e^{ix(k'+k)} + b(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}') e^{ix(k-k')} \Big] \end{aligned}$$

de donde factorizamos por términos como $\int d^3x\, e^{i\vec{x}\cdot(\vec{k}\pm\vec{k}')} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}\pm\vec{k}')$

$$= -\Omega_0 V + \int \frac{\widetilde{dk}}{2\omega} \Big[\omega^2 \big(a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) - a(\vec{k}) b(-\vec{k}) e^{-2i\omega t} - b^\dagger(\vec{k}) a^\dagger(-\vec{k}) e^{+2i\omega t} + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \big)$$
$$+ |\vec{k}|^2 \big(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) b^\dagger(-\vec{k}) e^{+2i\omega t} + b(\vec{k}) a(-\vec{k}) e^{-2i\omega t} + b(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}) \big)$$
$$+ m^2 \big(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) b^\dagger(-\vec{k}) e^{+2i\omega t} + b(\vec{k}) a(-\vec{k}) e^{-2i\omega t} + b(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}) \big) \Big]$$

Juntamos los términos separados y usamos la relación on-shell $|\vec{k}|^2 + m^2 = \omega^2$

$$H = -\Omega_0 V + \int \frac{\widetilde{dk}}{2\omega} \omega^2 \Big[a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) - \big(a(\vec{k}) b(-\vec{k}) - b(\vec{k}) a(-\vec{k}) \big) e^{-2i\omega t}$$
$$- \big(b^\dagger(\vec{k}) a^\dagger(-\vec{k}) - a^\dagger(\vec{k}) b^\dagger(-\vec{k}) \big) e^{+2i\omega t} + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) + b(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}) \Big]$$

donde para el segundo término de las expresiones azules podemos hacer el cambio $\vec{k} \to -\vec{k}$ (lo que mantiene invariante la integral $\int d^3k/2\omega$) y obtenemos cosas como

$$a(\vec{k}) b(-\vec{k}) - b(-\vec{k}) a(\vec{k}) = [a(\vec{k}), b(-\vec{k})] = 0$$

por lo tanto

$$H = -\Omega_0 V + \int \widetilde{dk} \, \frac{\omega}{2} \big[a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) + b(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}) \big]$$

donde usaremos que

$$a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + (2\omega)(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0})$$

y lo mismo para $a \to b$. Entonces

$$H = -\Omega_0 V + \int \widetilde{dk} \, \omega \big[a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) + (2\omega)(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) \big],$$

donde $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) = \int d^3x \, e^{i\vec{x}\cdot(\vec{y}-\vec{y})} = \int d^3x \cdot 1 = V$

$$\Rightarrow H = (\mathcal{E}_0 - \Omega_0) V + \int \widetilde{dk} \, \omega \big[a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \big]$$

donde definimos $\mathcal{E}_0 \equiv (2\pi)^{-3} \int d^3k \, \omega$. Podemos integrar $\mathcal{E}_0$ considerando un cutoff UV $|\vec{k}|_{max} = \Lambda$

$$\mathcal{E}_0 = (2\pi)^{-3} \int_\Omega d\Omega \int_0^\Lambda dk \, k^2 \sqrt{k^2 + m^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk \, k^3 \underbrace{\cancel{\sqrt{1 + \frac{m^2}{k^2}}}}_{\sim 1 \text{ si } k \gg m}$$

$$= \frac{\Lambda^4}{8\pi^2}$$

Por lo tanto, para obtener una energía basal nula

$$E_0 = \langle 0|H|0\rangle = (\mathcal{E}_0 - \Omega_0)V + \int \widetilde{dk}\, \omega \left[\underbrace{\cancel{\langle 0|a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})|0\rangle}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\langle 0|b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})|0\rangle}}_{=0} \right]$$

$$= (\mathcal{E}_0 - \Omega_0)V \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega_0 = \mathcal{E}_0 = \frac{\Lambda^4}{8\pi^2}}$$